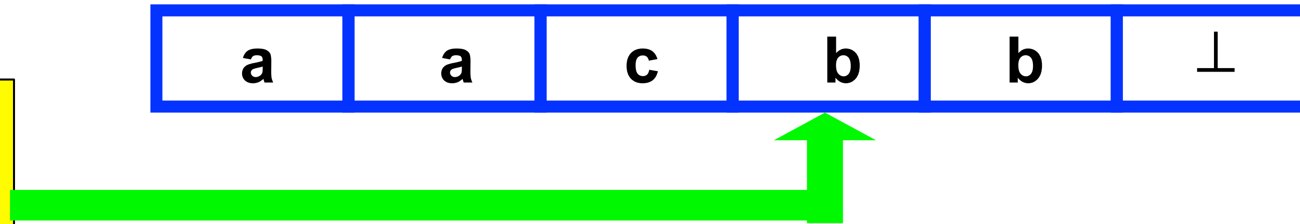
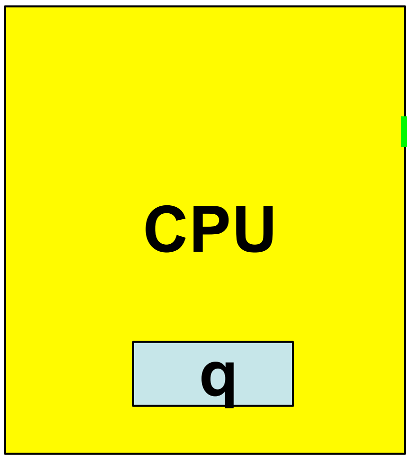
Variianti del modello base

Macchina di Turing con tre spostamenti della testina





$\delta : Q - \{q_a, q_r\} \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L,R,S\}$ è la funzione di transizione;

Mosse con testina

che si muove a a destra:

se $\delta(q,a) = (p,b,R)$ allora

$$\alpha q a c \beta \Rightarrow_T \alpha b p c \beta$$

che si muove a sinistra:

se $\delta(q,c) = (p,b,L)$ allora

$$\alpha a q c \beta \Rightarrow_T \alpha p a b \beta$$

ferma:

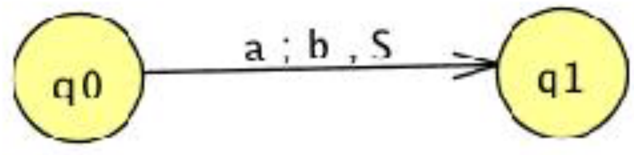
se $\delta(q,c) = (p,b,S)$ allora

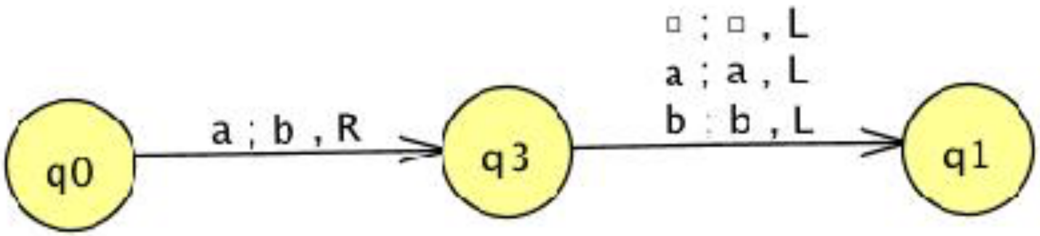
$$\alpha a q c \beta \Rightarrow_T \alpha a p b \beta$$

L'ulteriore possibilità non aumenta il potere computazionale

Possiamo simulare la mossa con testina ferma con una mossa a destra andando in un nuovo stato e una a sinistra su ogni simbolo di nastro.

Supponendo che l'alfabeto di nastro sia solo {a,b,cella vuota}:

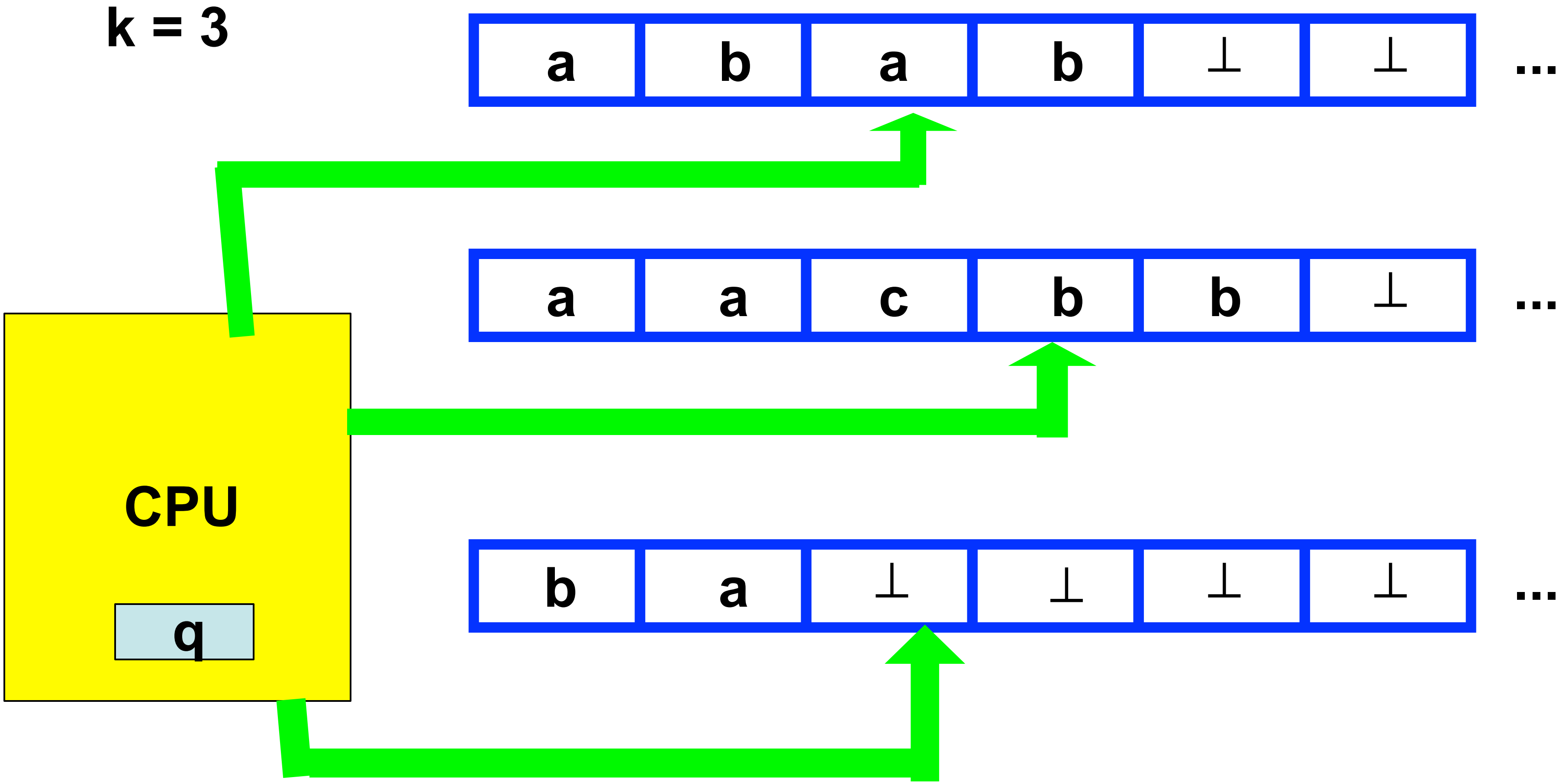




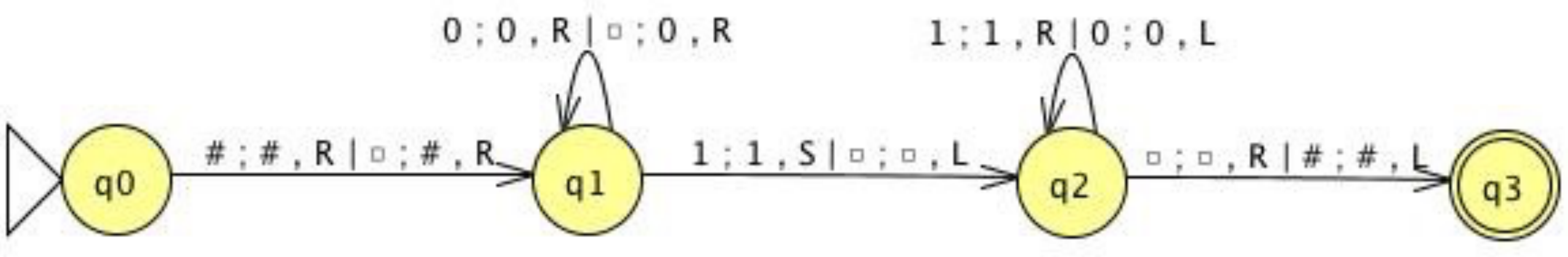
se $\delta(q_0,a) = (q_1,b,S)$ **allora** $\alpha q_0 ab\beta \Rightarrow_T \alpha q_0 bb\beta$

e equivalentemente $\alpha q_0 ab\beta \Rightarrow_T \alpha b q_3 b\beta \Rightarrow_T \alpha q_1 bb\beta$

Macchina di Turing a k nastri



2TM per L = $\{0^n 1^n \mid n>0\}$



Macchina di Turing a k nastri

Una Machina di Turing deterministica a k nastri, in breve kTM , è una settupla

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$$

come nel caso a un nastro dove

$$\delta : (Q - \{ q_a , q_r \}) \times \Gamma^k \longrightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R\}^k,$$

è la funzione di transizione, che descrive i cambiamenti nelle celle in lettura sui singoli nastri e la direzione di spostamento delle k testine di lettura. Se

$$\delta(q, a_1, \ldots, a_k) = (p, b_1, \ldots, b_k, D_1, \ldots, D_k)$$

con a_i, b_i in Γ, D_i in $\{L,R\}$, per $i = 1,\ldots,k$, si intende che nello stato q leggendo a_1 sul primo nastro,..., a_k sul k-simo, la k-TM entra nello stato p, scrive b_1 sul primo nastro,...,b_k sul k-simo nastro e sposta la prima testina in direzione D_1, ... e la k-sima in direzione D_k.

Configurazioni per una K-TM

Una configurazione deve informare sul contenuto del nastro, lo stato della macchina e la posizione delle testine di lettura.

Queste informazioni si possono ottenere sinteticamente con k sequenze del tipo

$$\alpha_1 q a_1 \beta_1, \ldots, \alpha_k q a_k \beta_k \text{ in } (\Gamma^* Q \Gamma^*)^k$$

dove α_i e β_i sono stringhe su Γ, a_i è un simbolo di Γ, $\alpha_i a_i \beta_i$ è il contenuto dell'i-simo nastro, a_i è il simbolo in lettura sull'i-simo nastro, per $1 \leq i \leq k$, e q è lo stato della macchina.

Mosse

Un configurazione porta a un'altra se le operazioni di scrittura e di spostamento delle testine sono eseguite in conformità ad una regola descritta dalla funzione di transizione

La sequenza $q_0 a_1 \ldots a_n, q_0 \perp, \ldots, q_0 \perp$ in $(\Gamma^* Q \Gamma^*)^k$, dove $a_1 \ldots a_n$ è la stringa input e q_0 è lo stato iniziale, è la configurazione iniziale.

Una configurazione del tipo $\alpha_1 q_a a_1 \beta_1, \ldots, \alpha_k q_a a_k \beta_k$ è detta di accettazione.

Una configurazione del tipo $\alpha_1 q_r a_1 \beta_1, \ldots, \alpha_k q_r a_k \beta_k$ è detta di rifiuto.

Queste configurazioni sono di terminazione

Linguaggio accettato

Sia $M = (Q,\Sigma, \Gamma,\delta,q_0, q_a , q_r)$ una kTM, e sia $C(x)$ l'insieme delle configurazioni raggiungibili da quella iniziale per l'input $x= q_0\, a_1 \ldots a_n, q_0 \perp, \ldots, q_0 \perp$

Il linguaggio **accettato** (riconosciuto) è

$L(M) = \{x \mid x \in \Sigma^* \text{ e } \exists\, c \in C(x) \text{ e } c \text{ è di accettazione}\}$

Il linguaggio **rifiutato** è

$R(M) = \{x \mid x \in \Sigma^* \text{ e } \exists\, c \in C(x) \text{ e } c \text{ è di rifiuto}\}$

In generale $L(M) \cup R(M) \subseteq \Sigma^*$!
Se $L(M) \cup R(M) = \Sigma^*$ allora vuol dire che la TM si ferma sempre, in tal caso L(M) è il linguaggio **deciso** dalla TM.

Classe dei linguaggi accettati

L'insieme dei linguaggi che sono accettati da una kTM è così definito, per ogni $k \geq 1$:

$$\mathcal{L}(\text{TMPiùNastri}) =$$

$$\{L \mid \exists\, k \in N,\ \exists\, M \in kTM, \text{ e } L(M) = L\}$$

Macchina di Turing a k nastri

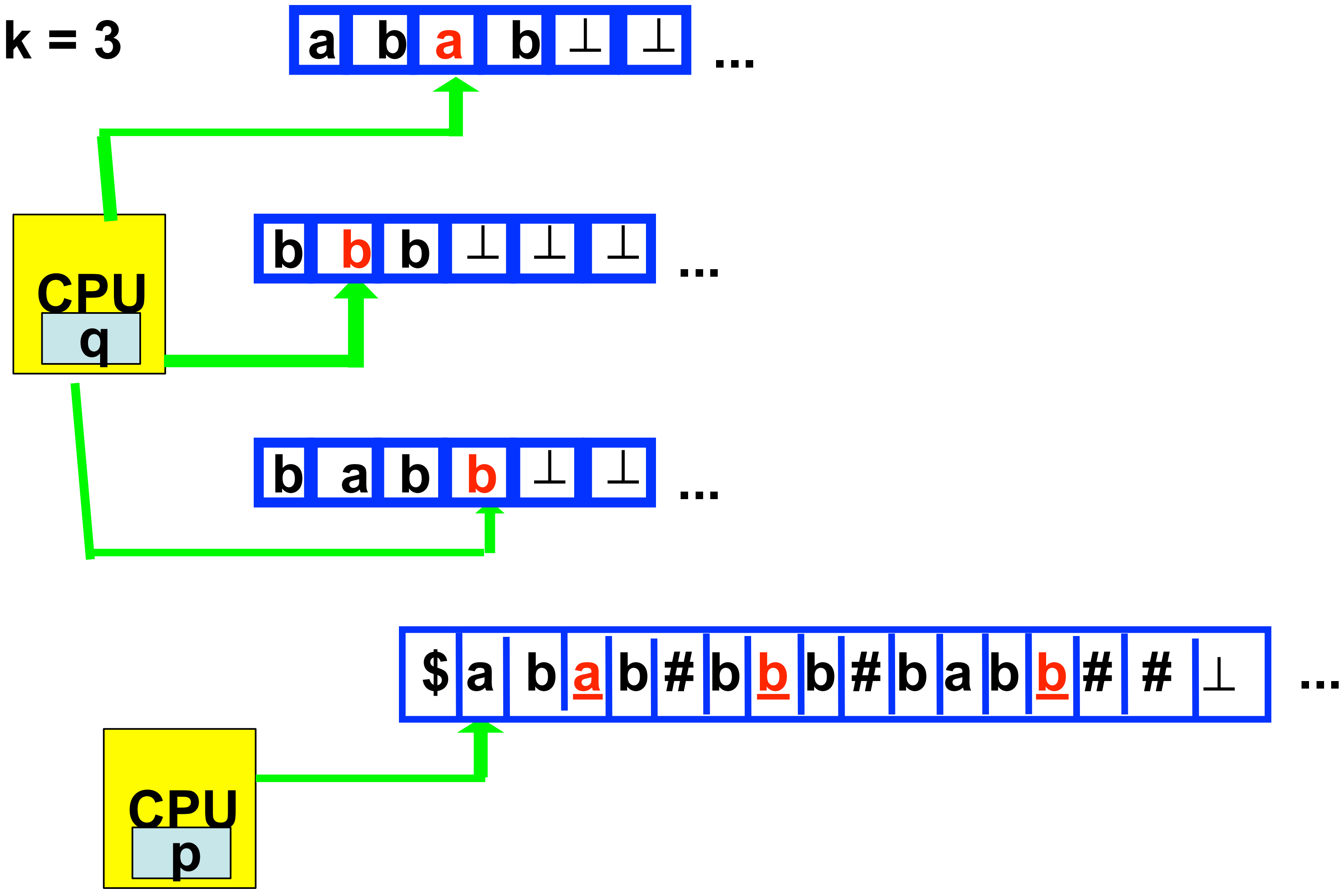
DOMANDA:
La versione a k nastri ha un potere computazionale maggiore??

RISPOSTA: NO.

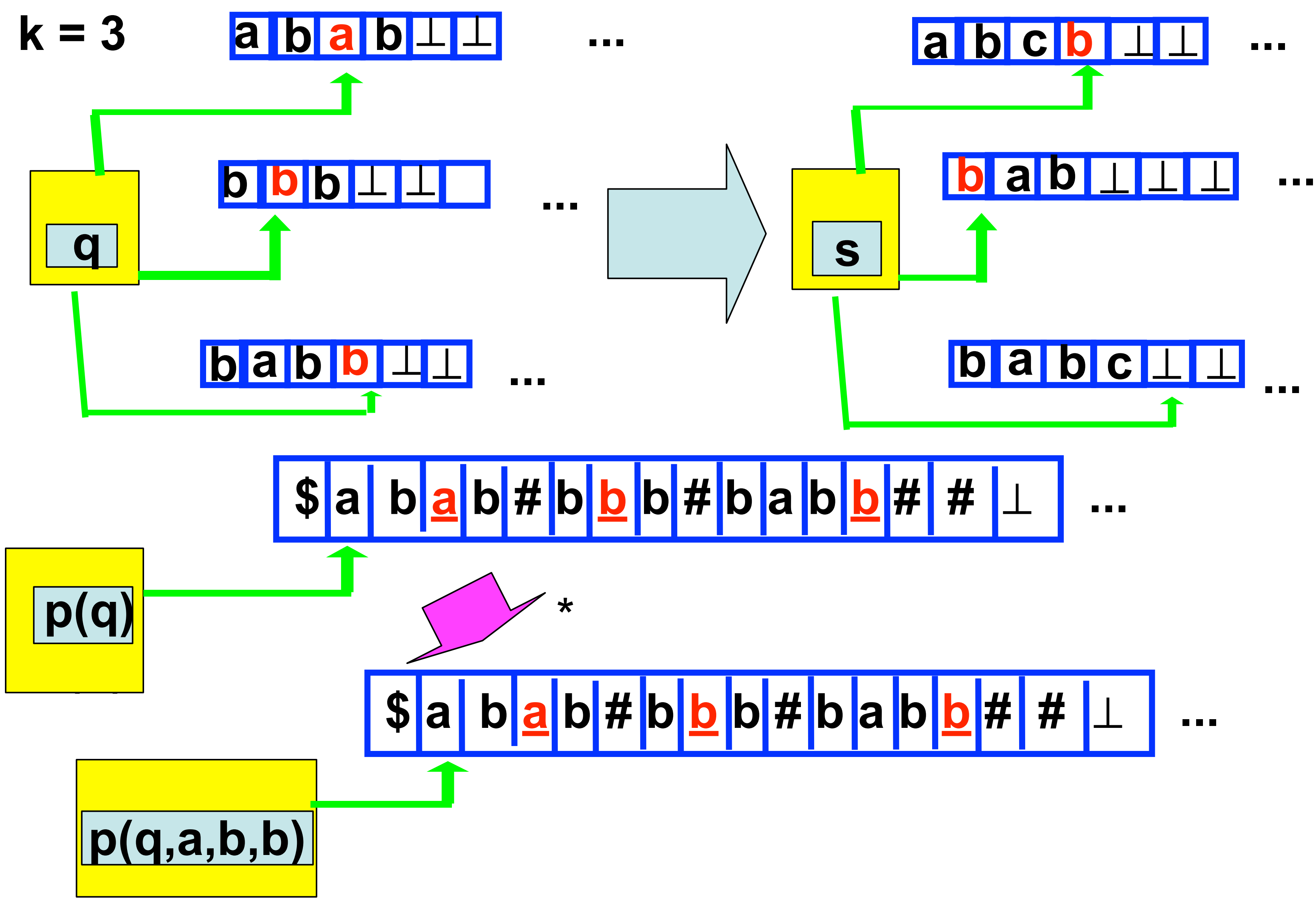
Possiamo dimostrare l'esistenza di una TM a un solo nastro equivalente a una TM a k nastri.

Quindi $\mathcal{L}$(TM) = $\mathcal{L}$(TMPiùNastri).

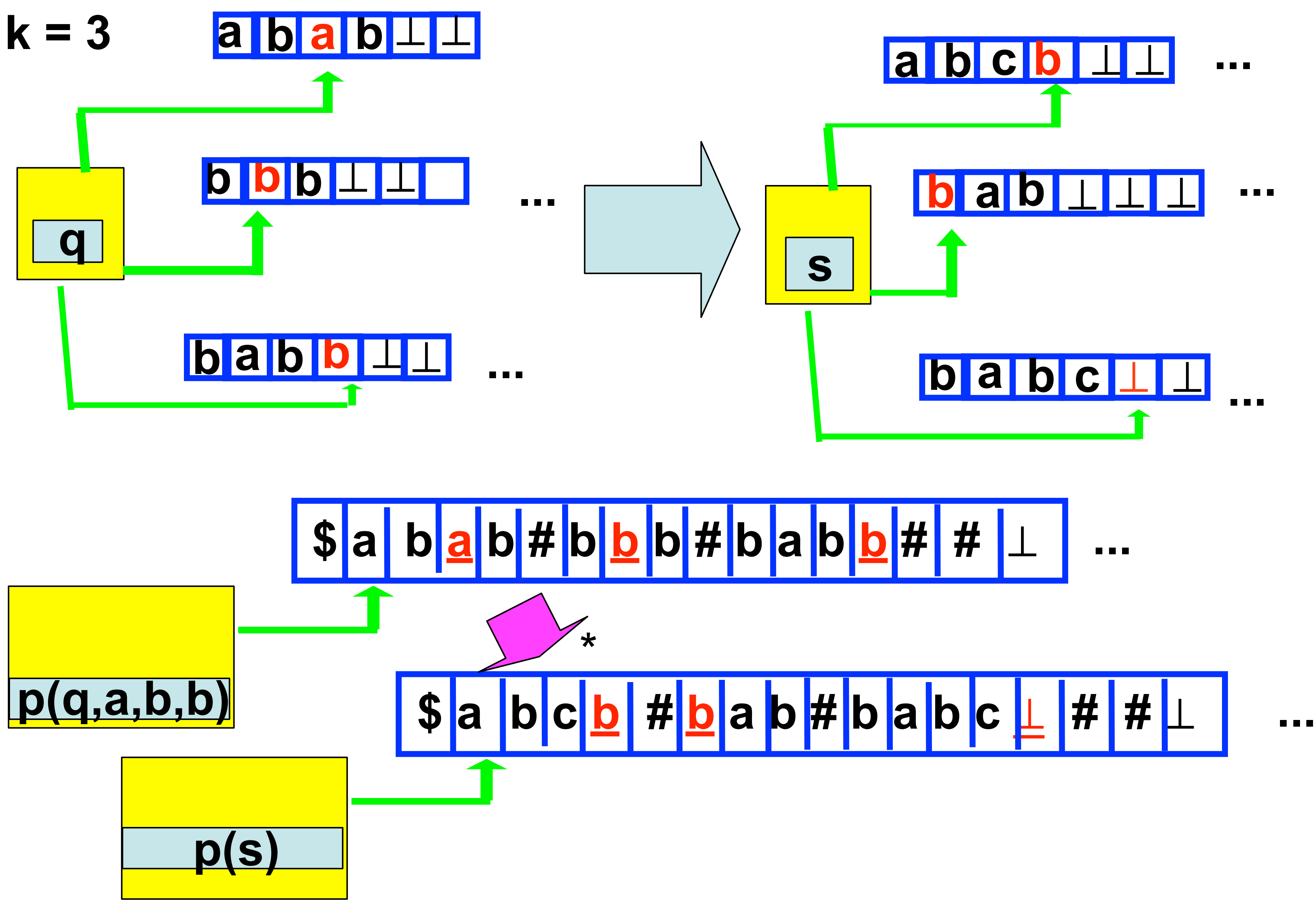
Costruzione di una TM equivalente a una a k nastri: la rappresentazione dei nastri



Simulazione di una mossa: parte 1

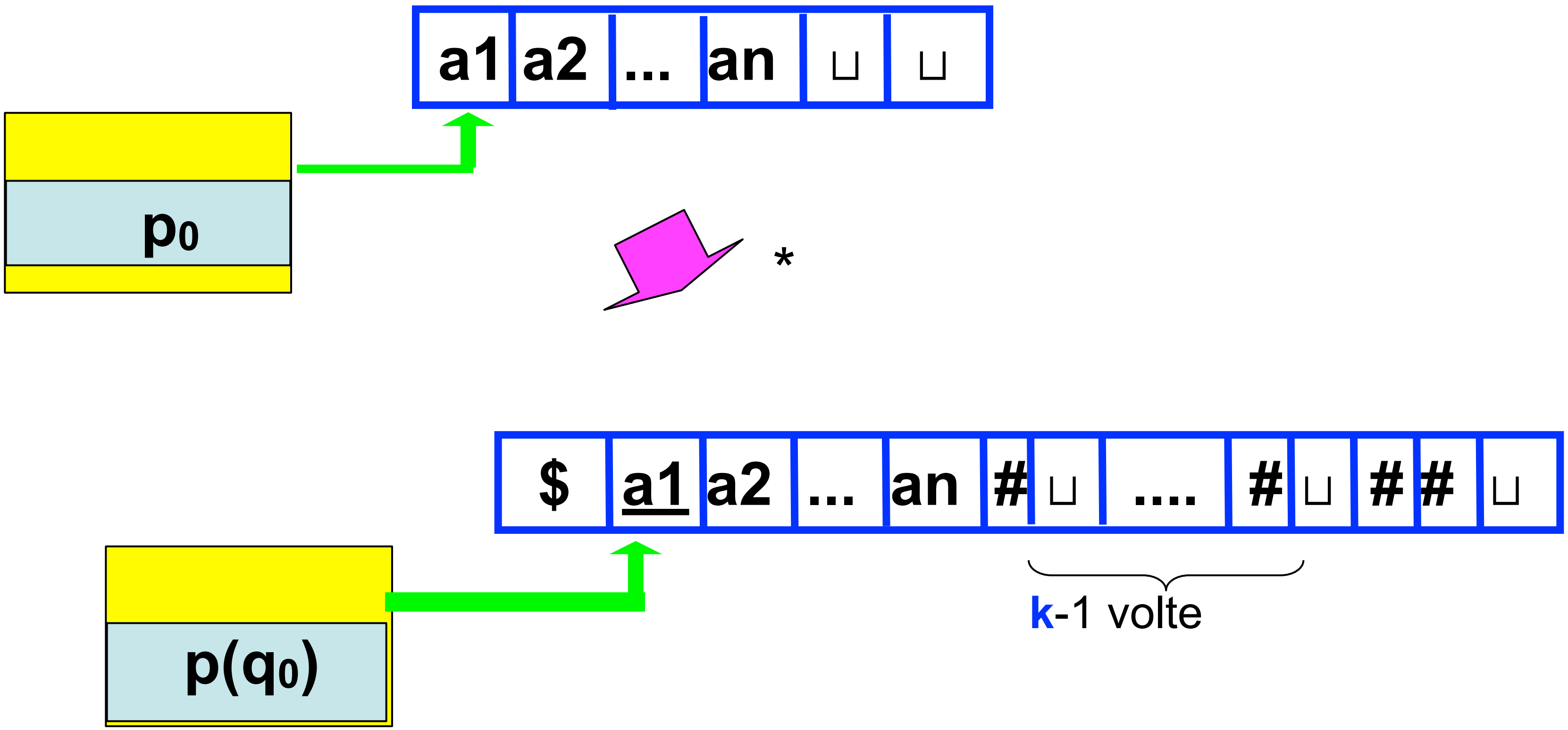


Simulazione di una mossa: parte 2



Inizio simulazione: predisposizione del nastro

Detta $a_1 ... a_n$ la stringa input, la TM simulante deve configurare il nastro in modo da poter eseguire le mosse della TM a k nastri. Lo stato iniziale della TM simulante è p_0 e q_0 quello della kTM.



La TM T equivalente a una kTM M

T: input: $a_1 \ldots a_n$

1. **le prime mosse di T portano alla configurazione:**
   $\$p(q_0)\underline{a_1}\ldots a_n \underbrace{\#\underline{\perp}\# \ldots \underline{\perp}}_{k\text{-1 volte}}\#\#$

2. per ogni mossa del tipo $\delta(q,a_1,\ldots,a_k) = (s,b_1,\ldots,b_k,D_1,\ldots,D_k)$ di M la TM T scorre il nastro verso destra, memorizzando nello stato i simboli in lettura sui singoli nastri; poi riposiziona la testina all'inizio del nastro e scorre il nastro di nuovo verso destra eseguendo sulla porzione i-sima di nastro le azioni che simulano scrittura e spostamento della testina sull'i-simo nastro, per i= 1,...,k. Infine T entra nello stato che ricorda il nuovo stato s e riposiziona la testina all'inizio del nastro.
Se s è di accettazione o di rifiuto per M, anche T va nel suo stato di accettazione o di rifiuto. Quindi L(T)=L(M).

Nota alla costruzione di una TM equivalente a una a k nastri

Se la simulazione della mossa comporta lo spostamento a destra della i-sima testina di lettura, ma in quella cella c'è #, bisogna aggiungere una cella vuota alla i-sima porzione di nastro, $1 \leq i \leq k$. Per farlo sarà necessario spostare di una posizione a destra tutto il contenuto dei nastri, a partire dalla cella a destra della posizione della i-sima testina.