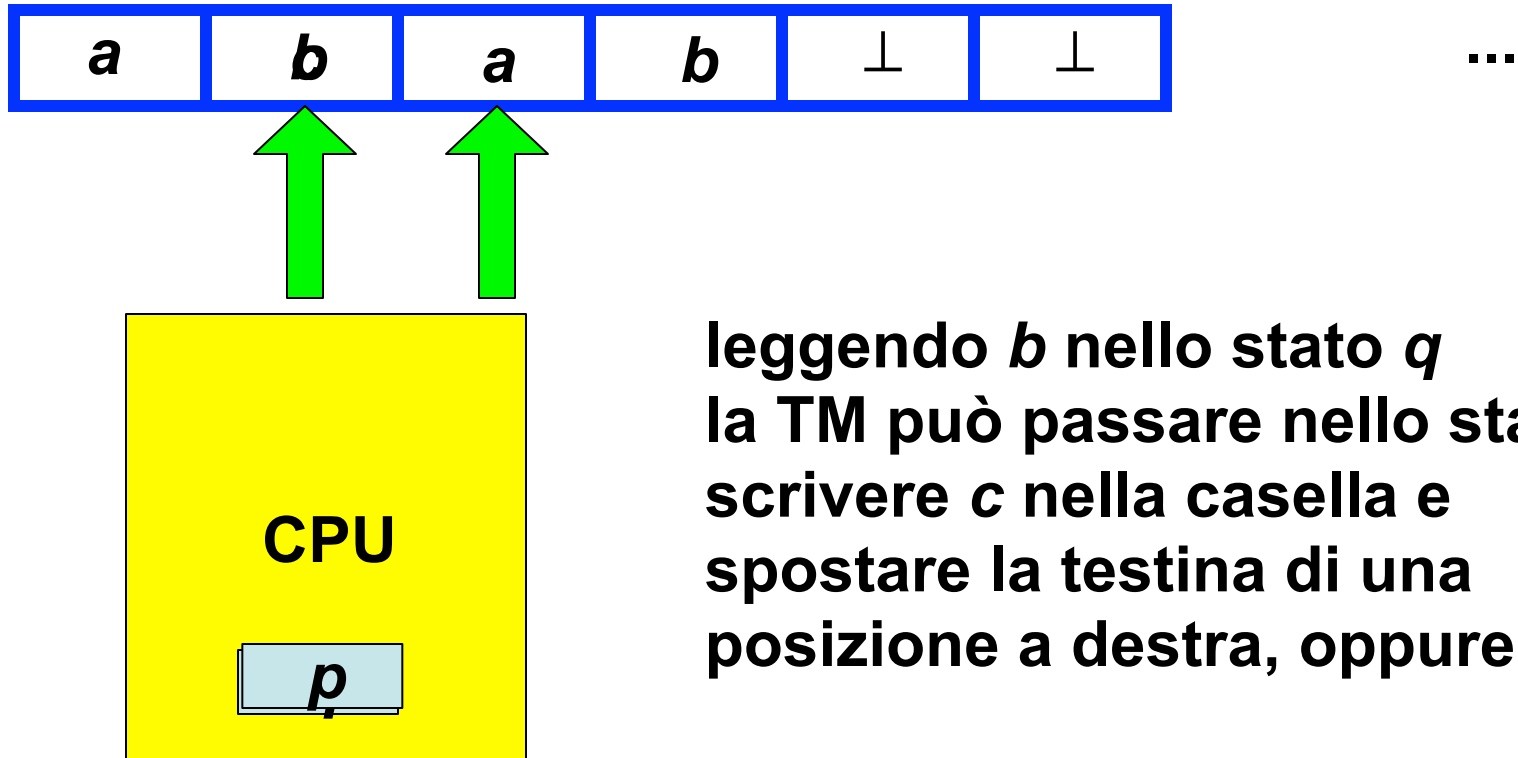


Sommario

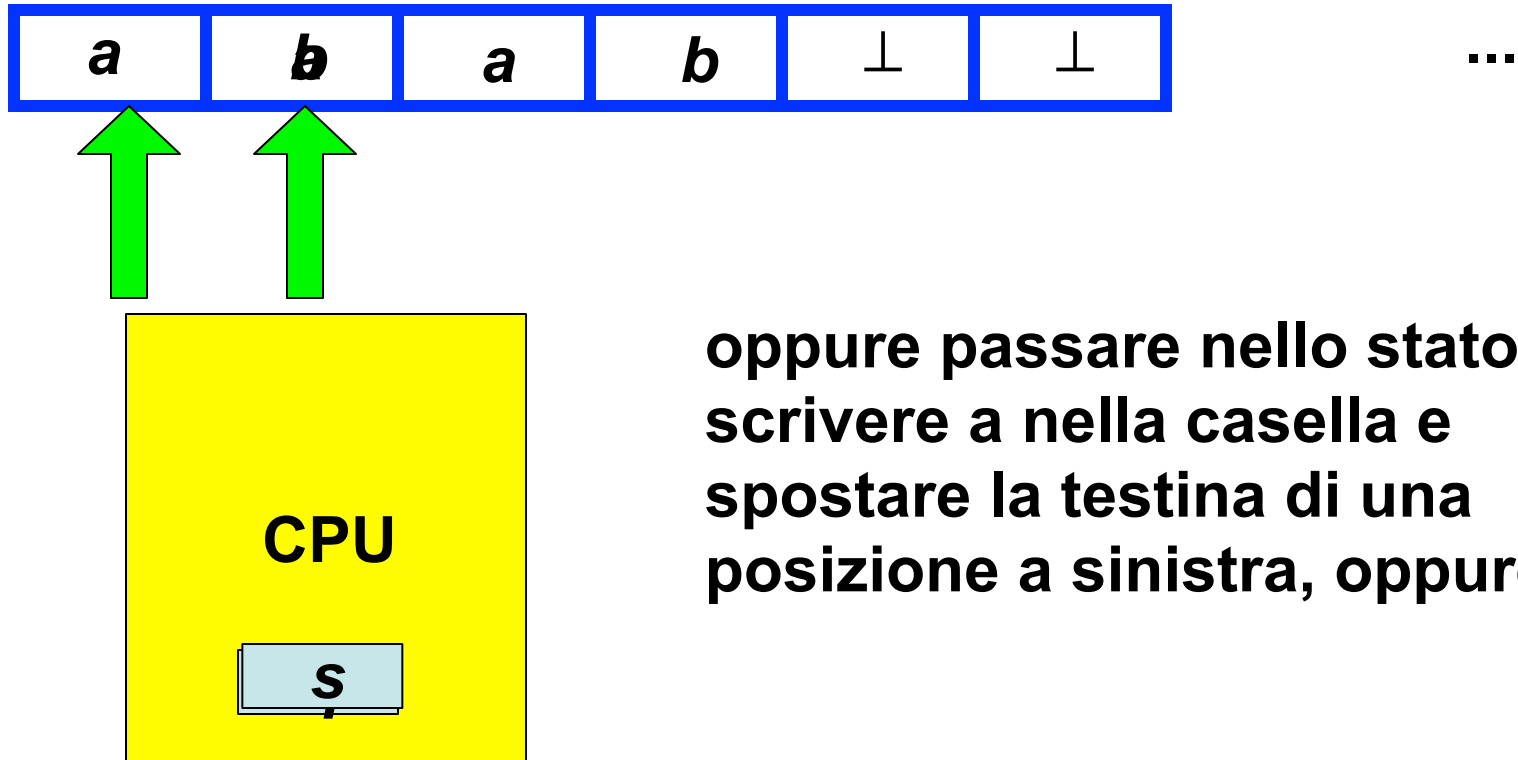
- **Versione non deterministica della TM**
- **equivalenza con la deterministica**

Macchine di Turing non deterministica



leggendo b nello stato q
la TM può passare nello stato p
scrivere c nella casella e
spostare la testina di una
posizione a destra, oppure

Macchine di Turing non deterministica



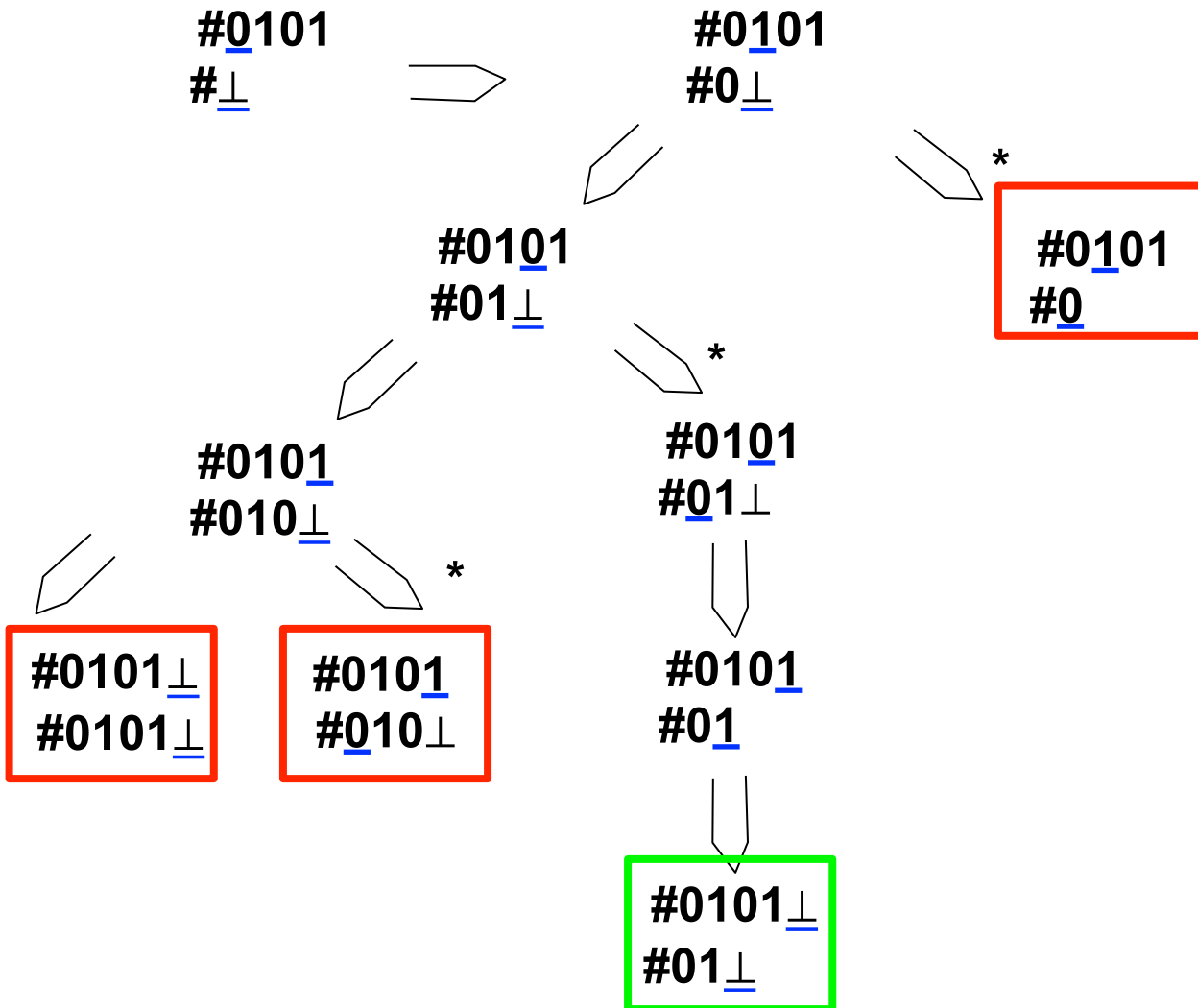
oppure passare nello stato s ,
scrivere a nella casella e
spostare la testina di una
posizione a sinistra, oppure...

Macchina di Turing non deterministica

Una NTM con 2 nastri per $\{ww \mid w \text{ è in } \{0,1\}^*\}$ è:

1. **marca l'inizio dei nastri**
2. **copia la stringa input sul primo nastro sul secondo**
3. **non deterministicamente interrompi la copia e riporta la testina di lettura del secondo nastro all'inizio**
4. **controlla che il resto della stringa sul primo nastro coincida con quello del secondo e se sì accetta altrimenti rifiuta.**

Esempio di computazione su 0101 (solo contenuto dei nastri)



Modello formale

Una **Machina di Turing non deterministica**, in breve **NTM** (**N**ondeterministic **T**uring **M**achine), è una settupla $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ le cui componenti sono come nel caso della TM ma la cui funzione di transizione è così definita

$$\delta : Q - \{q_a, q_r\} \times \Gamma \rightarrow \mathbf{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$$

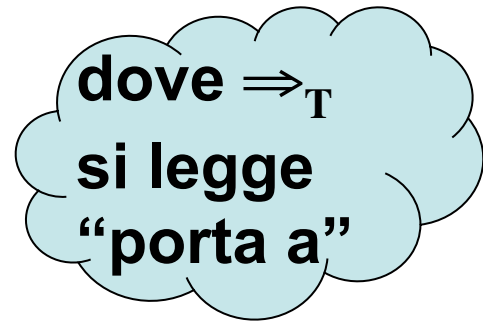
dove $\mathbf{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$ è l'insieme dei sottoinsiemi di $Q \times \Gamma \times \{L, R\}$

Mosse

a destra:

se (p,b,R) è in $\delta(q,a)$ allora

$$\alpha q a c \beta \Rightarrow_T \alpha b p c \beta$$



a sinistra:

se (p,b,L) è in $\delta(q,c)$ allora

$$\alpha a q c \beta \Rightarrow_T \alpha p a b \beta$$

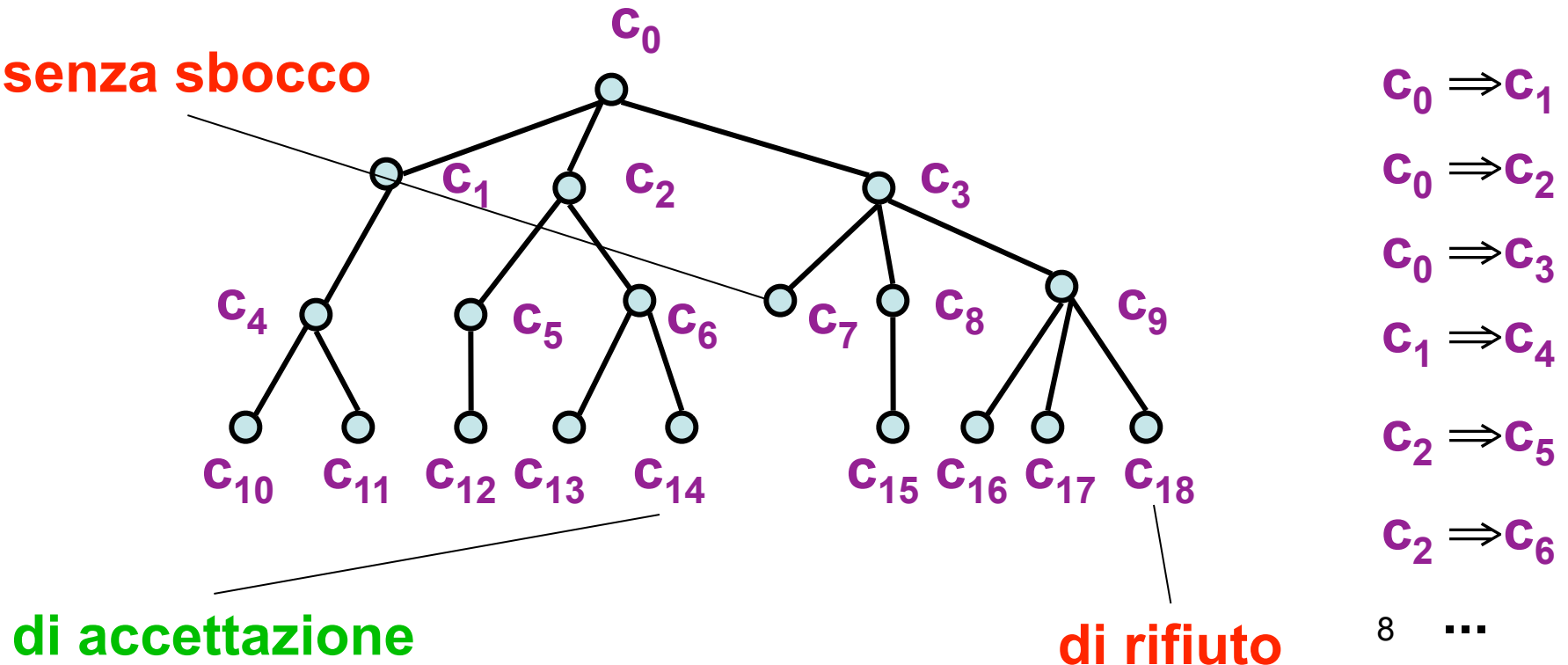
Una configurazione del tipo $\alpha q_a \beta$ è detta di accettazione.

Una configurazione del tipo $\alpha q_r \beta$ è detta di rifiuto.

Queste configurazioni sono di terminazione

Macchine di Turing non deterministica: passi di calcolo

Un calcolo di una NTM su un input x è ben descritto da un albero, in cui ogni nodo è etichettato da una configurazione raggiungibile da quella iniziale, $c_0 = q_0x$



Linguaggio accettato

Sia $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$, e sia $C(x)$ l'insieme delle configurazioni raggiungibili da quella iniziale $c_0 = q_0x$.

Il linguaggio accettato è

$L(M) = \{x \mid x \in \Sigma^* \text{ e } \exists c \in C(x) \text{ e } c \text{ è di accettazione}\}$

$\alpha q_a \beta$

Il linguaggio rifiutato è

$R(M) = \{x \mid x \in \Sigma^*, M \text{ si ferma su } x \text{ e } \forall c \in C(x) \text{ e terminale, } c \text{ è di rifiuto}\}$

$\alpha q_r \beta$

Non sempre $L(M) \cup R(M) = \Sigma^*$!

Classe dei linguaggi accettati

L'insieme di tutti i linguaggi che sono accettati da una NTM è così definito:

$$\mathcal{L}(\text{NTM}) = \{L \mid \exists M \in \text{NTM} \text{ e } L(M) = L\}$$

Equivalenza tra NTM e TM

DOMANDA:

La versione nondeterministica ha un potere computazionale maggiore??

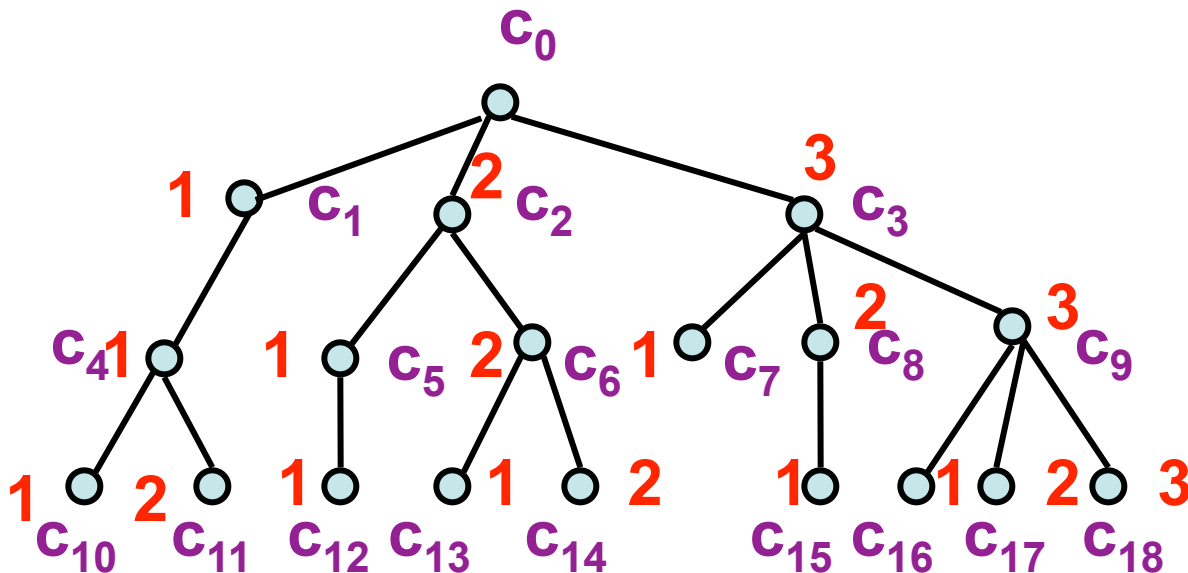
RISPOSTA: NO.

Possiamo dimostrare l'esistenza di una TM equivalente a una NTM data e cioè che $\mathcal{L}(NTM) \subseteq \mathcal{L}(TM)$,

Quindi $\mathcal{L}(NTM) = \mathcal{L}(TM)$, visto che la versione deterministica è un caso particolare di quella nondeterministica e cioè che vale $\mathcal{L}(TM) \subseteq \mathcal{L}(NTM)$.

Una TM equivalente a una NTM: l'idea della costruzione

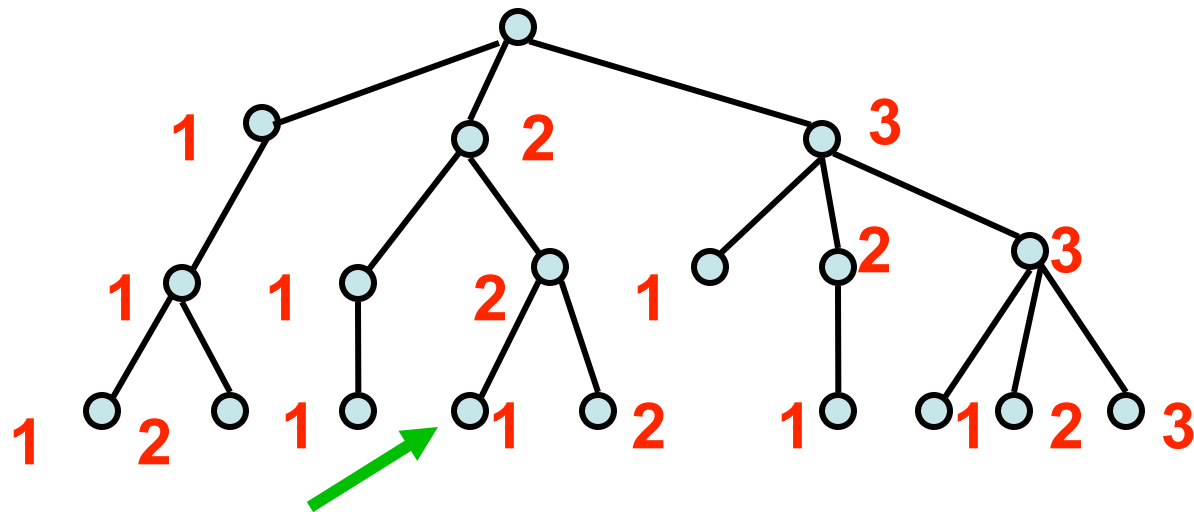
L'albero delle configurazioni raggiungibili da una iniziale può essere "visitato" per livelli, per eseguire in sequenza tutte le mosse nondeterministicamente eseguite dalla NTM data.



Per essere in grado di eseguire una sequenza di mosse bisogna saper risalire a un cammino radice-nodo, per questo numeriamo in sequenza i figli di ogni nodo da sinistra a destra.

Una TM equivalente a una NTM: l'idea della costruzione - 2

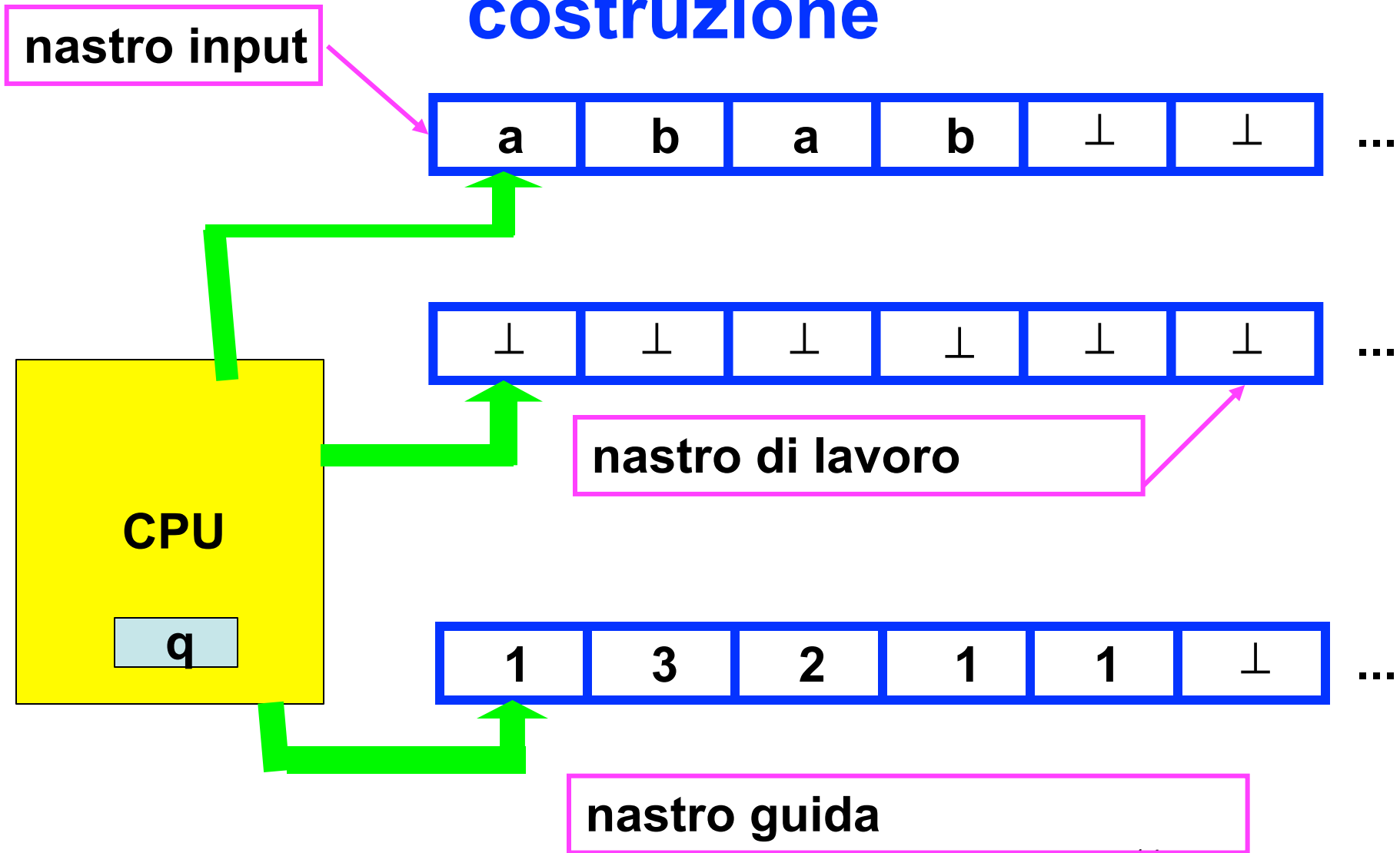
Ora ogni nodo è individuato dalla sequenza delle etichette sui nodi del cammino dalla radice.



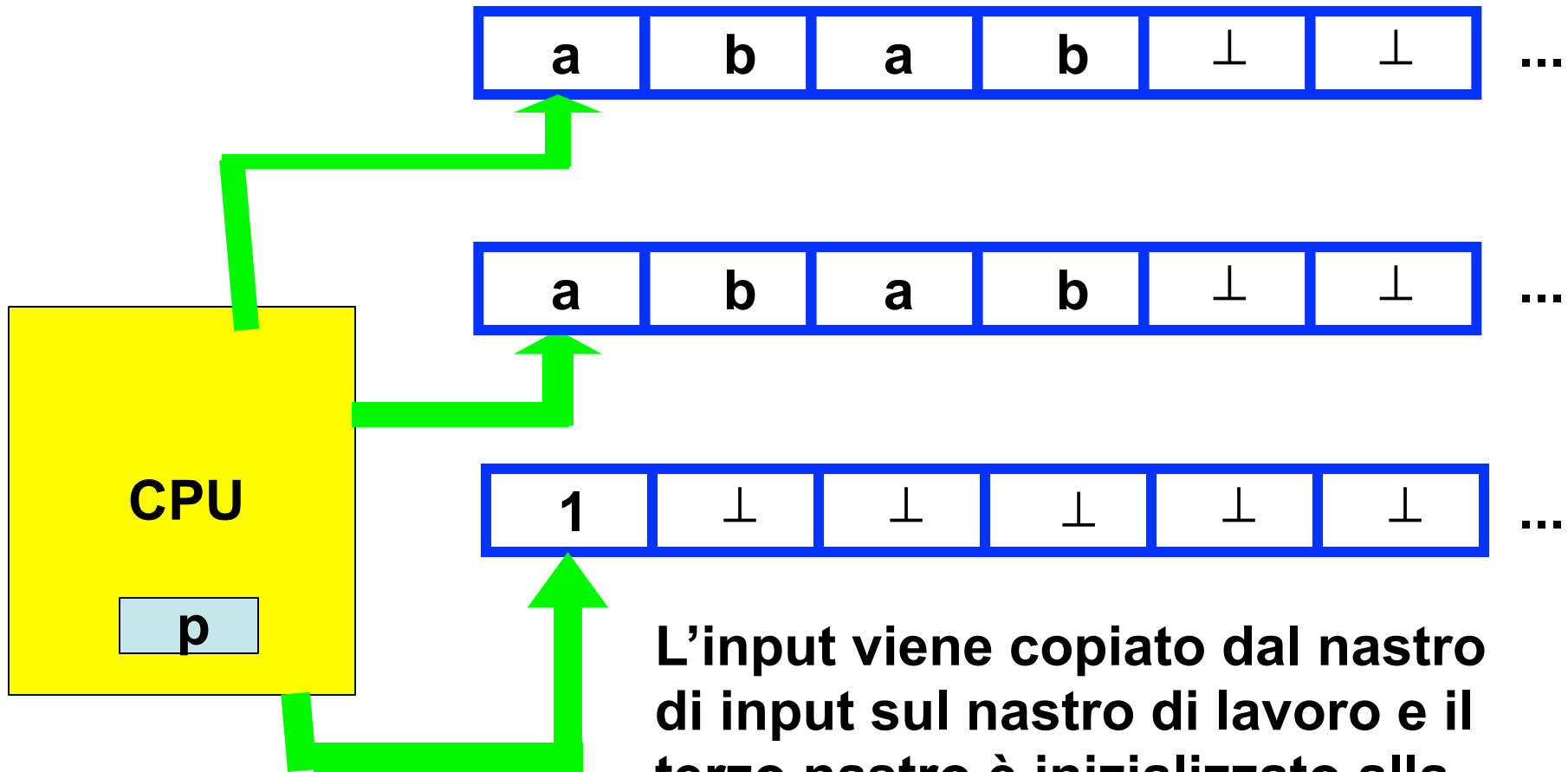
Per esempio la sequenza **221** individua il nodo segnalato dalla freccia

Questa sequenza dice che la configurazione corrispondente al nodo si raggiunge compiendo la seconda scelta tra quelle disponibili a partire dalla configurazione iniziale, poi di nuovo la seconda e infine la prima.

Una TM equivalente a una NTM: la costruzione

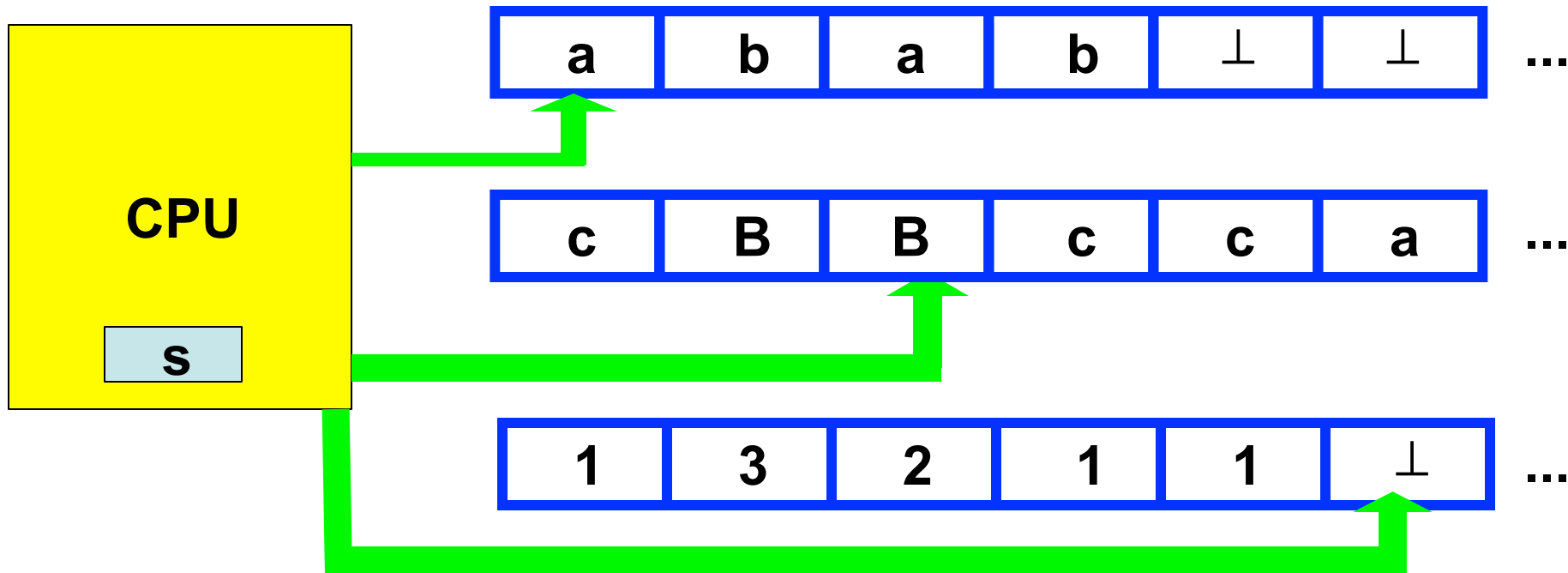


Una TM equivalente a una NTM: inizializzazione



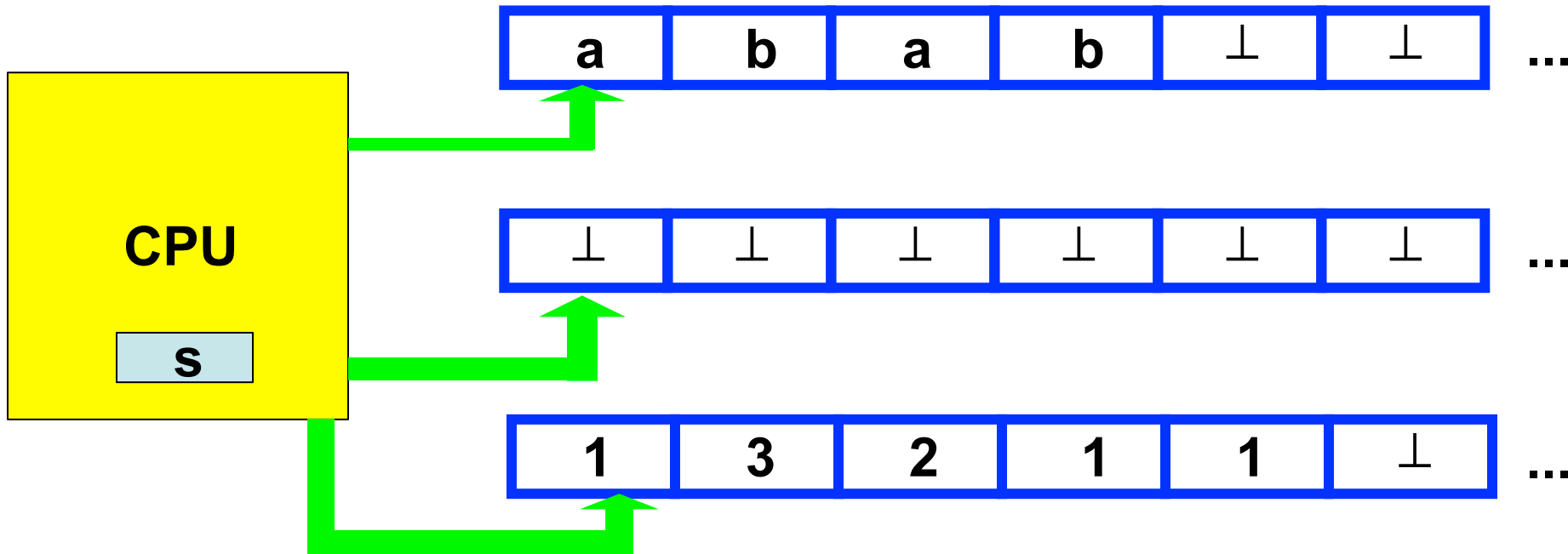
L'input viene copiato dal nastro di input sul nastro di lavoro e il terzo nastro è inizializzato alla prima sequenza.

Una TM equivalente a una NTM: l'esecuzione di una sequenza di mosse corrispondenti a una delle computazioni della NTM



Viene eseguita la sequenza di mosse dettata dalla stringa sul terzo nastro. Se il numero correntemente in lettura non corrisponde a una scelta allora la TM abbandona l'esecuzione della sequenza di mosse.

Una TM equivalente a una NTM: fase finale dell'esecuzione di una computazione della NTM



Al termine della sequenza di mosse o in caso di abbandono prematuro il secondo nastro viene cancellato, le testine riportate sulla prima cella e la TM procede in funzione dello stato della macchina simulata: se è di accettazione la TM si ferma e accetta, altrimenti genera la sequenza successiva sul terzo nastro e ricopia l'input sul secondo nastro, per cominciare una nuova esecuzione.

La TM equivalente a una NTM

- Sia $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ la NTM da simulare.
- Sia $r = \max \{|\delta(q,a)| \mid q \text{ in } Q \text{ e } a \text{ in } \Gamma\}$
- Sia $D = \{1, 2, \dots, r\}$ l'alfabeto delle sequenze guida
- Sia M_0 la TM che genera e scrive sul nastro la sequenza sull'alfabeto $\{1, 2, \dots, r\}$ successiva a quella data in input.
- La TM M' equivalente a M è una 3-TM che esegue tutte le possibili esecuzioni della NTM nell'ordine dettato dalle sequenze guida sul terzo nastro. Queste ultime vengono generate e aggiornate dalla copia della TM M_0 incorporata in M' . Come visto, la TM M' usa il secondo nastro per ogni esecuzione, e conserva l'input sul primo per poterlo ricopiare e poi avviare la successiva esecuzione. M' si ferma e accetta quando M si ferma e accetta.
- In tutti gli altri casi **non** si ferma.