1. Si dimostri che il linguaggio L = $\{1^n0^m$ per $0 \leq m \leq n \leq 2m\}$ non è regolare.

Sol. Per ogni n prendiamo $w = 1^n0^n$ in L e facciamo vedere che comunque scomposta in tre sottoparole x,y e z, con la condizione che $|xy| \leq n$ $|y|>0$, esiste un i tale che xy^iz non è in L. Date le condizioni sulle lunghezze di xy e di y entrambe sono formate di soli 1 e quindi basta prendere i=0 per avere almeno un 1 in meno nella prima metà della parola e questa parola allora non è in L.

2. Si dimostri che il linguaggio L = $\{0^p$ dove p è un numero primo$\}$ non è regolare.

Sol. Per ogni n prendiamo il più piccolo numero primo $p \geq n$ e $w = 0^p$. La parola w è in L, facciamo vedere che comunque scomposta in tre sottoparole x,y e z, con la condizione che $|xy| \leq n$ $|y|>0$, esiste un i tale che xy^iz non è in L. Sia $x = 0^r$, $y = 0^s$ e $z = 0^{p-(r+s)}$, con $r \geq 0$ e $s>0$, bisogna trovare un valore di i tale che r+is+p-(r+s) sia un numero composto. Semplificando si ha r+is+p-(r+s) = is+p-s = (i-1)s +p, allora se prendiamo i-1 = p possiamo mettere in evidenza p e ottenere (i-1)s+p = ps+p=p(s+1) che è composto. Concludendo se si prende i = p-1 la parola xy^iz non è in L e quindi L non è regolare.

3. Si dimostri che il linguaggio L = $\{0^n$ dove n è una potenza di 2$\}$ non è regolare.

Sol. Per ogni n $w = 0^m$, con $m=2^n$. La parola w è in L, facciamo vedere che comunque scomposta in tre sottoparole x,y e z, con la condizione che $|xy| \leq n$ $|y|>0$, esiste un i tale che xy^iz non è in L.
Sia $x = 0^r$, $y = 0^s$ e $z = 0^t$, con $r,t \geq 0, s>0$ e r+s+t=m, bisogna trovare un valore di i tale che r+is+t non sia una potenza di 2. Osserviamo che la differenza tra due potenze di 2 successive cresce con n e che se prendiamo i=0 diminuiamo il numero degli 0, ma al più di n, quindi non riusciamo a ottenere un numero di 0 pari alla potenza di 2 precedente a quella che stiamo considerando. Infatti $r+t = 2^n - s$ e $1 \leq s \leq n$, quindi al più $r+t = 2^n - n$, ma per avere 2^{n-1} dovrei sottrarre 2^{n-1} che è maggiore di n per $n \geq 3$. Questo limite su n non pesa perché è facile dimostrare che non c'è alcun automa con 1 o 2 stati che può accettare L.
Concludendo se si prende i = 0 la parola xy^iz non è in L e quindi L non è regolare.