Esercizi proposti in aula il 20 dicembre 2018.

Es.1
Si dimostri che la seguente funzione di riduzione dal problema del VERTEX COVER al problema del CLIQUE è corretta e calcolabile in tempo polinomiale.

VERTEX COVER $\leq_p$ CLIQUE usando la funzione f così definita:
detta <G,k> un istanza di VERTEX COVER, con G=(V,E) e |V|=n,

$$f(<G,k>) = <G',k'>,$$

dove G'=(V',E'), V'= V, E'={{u,v} | {u,v} non è in E}, cioè G' è il grafo complementare, e k'= n-k.

Sol.
Per la correttezza della riduzione si deve far vedere che <G,k> è un'istanza sì del problema del VERTEX COVER sse f(<G,k>), come specificato sopra è un'istanza sì del CLIQUE.

Prima facciamo vedere che <G,k> in VERTEX COVER implica che f(<G,k>) è in CLIQUE.
Sia A un k-vertex-cover per G, facciamo vedere che V-A è un (n-k)-clique per G'.
Due vertici u e v in V-A non possono essere collegati da un arco in G perché A è un vertex-cover, quindi u e v sono collegati da un arco in G', per definizione di G'. Possiamo concludere che V-A è un (n-k)-clique per G'.

Ora facciamo vedere che se B è un (n-k)-clique in G' allora V-B è un k-vertex-cover per G.
Se prendiamo un arco {u,v} in G, possiamo dire che u e v non possono essere entrambi in B, perché B per ipotesi è un (n-k)-clique in G' e gli archi di G' non ci sono in G, quindi almeno uno dei due vertici è in V-B. Il numero dei vertici in V-B è k e quindi abbiamo dimostrato che V-B è un k-vertex-cover per G.

La funzione f è calcolabile in tempo polinomiale perché deve solo scrivere la codifica di G', ottenuta da quella di G aggiungendo un arco tra due vertici se questo non è presente in G, e il numero n-k. La TM ha due nastri, quello di input che deve scorrere per controllare la codifica e l'altro per scrivere il valore della funzione. Detta n la lunghezza della codifica (maggiore della somma dei numeri dei vertici e degli archi) possiamo concludere che il numero dei passi è in $O(n^3)$, perché si deve controllare per ogni coppia di vertici se l'arco è presente in G e se non lo è lo si deve aggiungere nella codifica di G'. Si potrebbe anche dimostrarlo considerando un algoritmo e una rappresentazione dei grafi con la matrice delle adiacenze, in tal caso infatti l'operazione risulta lineare, perché basta riscrivere la matrice scambiando ogni 1 con 0 e viceversa.

Es.2
Si consideri il problema dell'esistenza di un sottografo di un grafo G isomorfo a un dato grafo, SOTTGI={<G,G'> | G ha un sottografo isomorfo a G'}.
Si dimostri che la seguente funzione di riduzione è corretta e calcolabile in tempo polinomiale.

CLIQUE $\leq_p$ SOTTGI usando la funzione f così definita:

detta <G,m> un istanza di CLIQUE, con G=(V,E) e |V|=n,

$$f(<G,m>) = <G,K_m>,$$

dove K_m è il grafo completo con m vertici.

Si dimostri che SOTTGI è in NP.

Si spieghi perché basta la riduzione da CLIQUE per dimostrare che SOTTGI è NP-hard.

Sol.
Prova della correttezza della riduzione.
Per la correttezza della riduzione si deve far vedere che <G,m> è un'istanza sì del problema del CLIQUE sse f(<G,m>), come specificato sopra è un'istanza sì del SOTTGI.
Prima facciamo vedere che <G,m> in CLIQUE implica che f(<G,m>) è SOTTGI.
Se <G,m> è un'istanza sì del CLIQUE allora G ha un sottografo completo di k vertici, che quindi è isomorfo a K_m.

Ora facciamo vedere che se f(<G,m>) = <G,K_m> è un'istanza sì del SOTTGI allora G è un'istanza sì del CLIQUE.
Se <G,K_m> è un'istanza sì del SOTTGI, per definizione G ha un sottografo isomorfo a un grafo completo di m vertici, che è un clique di m vertici in G.

La funzione f è calcolabile in tempo polinomiale perché deve solo aggiungere alla codifica di G, quella di K_m. La TM ha due nastri, quello di input che deve scorrere per controllare la codifica e l'altro per scrivere il valore della funzione. Detta n la lunghezza della codifica (maggiore della somma dei numeri dei vertici e degli archi) possiamo concludere che il numero dei passi è in O(n), quindi polinomiale.

Per dimostrare che SOTTGI è in NP, si deve far vedere che è possibile costruire un verificatore polinomiale per esso. Il verificatore prende in input un'istanza del problema, <G,G'>, e un certificato dato da un sottografo H di G con il numero dei vertici di G' e una sequenza di coppie costituite da un vertice di H e un vertice di G'.
Il verificatore controlla se la sequenza di coppie è tale che tutte le prime componenti sono diverse tra loro e altrettanto per le seconde; se la verifica ha successo la sequenza rappresenta una biezione. Controlla poi se la biezione è un isomorfismo tra grafi, verificando che ogni coppia di vertici di H è collegata da un arco in G sse le corrispondenti coppie di vertici in G' sono collegati da un arco.
Tale verifica è banalmente polinomiale nella lunghezza dell'input, si tratta infatti di scorrere la codifica di G e G' per ogni coppia di vertici del sottografo H e ogni coppia a questa corrispondente, quindi si può effettuare in $O(n^3)$.

Poiché la riduzione polinomiale è transitiva e il problema del CLIQUE è NP- hard abbiamo che per ogni A in NP A $\leq_p$ CLIQUE e CLIQUE $\leq_p$ SOTTGI insieme implicano che per ogni A in NP A $\leq_p$ SOTTGI. Quindi SOTTGI è NP-hard.

Es.3
Si considerino i seguenti problemi, varianti del problema dell'esistenza di un cammino hamiltoniano per grafi diretti.
DHAMS = {<G,s> | G è un grafo diretto, s è un vertice di G e in G c'è un cammino hamiltoniano che parte da s}
DHAMT = {<G,t> | G è un grafo diretto, t è un vertice di G e in G c'è un cammino hamiltoniano che termina in t}.

Si dimostri che la seguente funzione di riduzione è corretta e calcolabile in tempo polinomiale.

DHAMS $\leq_p$ DHAMT usando la funzione f così definita:

detta <G,s> un istanza di DHAMS,

f(<G,s>) = <G',s>,

dove G' è il grafo ottenuto da G invertendo la direzione degli archi.

Si dimostri che DHAMS è in NP.

Si spieghi perché basta la riduzione da DHAMS per dimostrare che DHAMT è NP-hard, se si sa che DHMAS è NP hard.

Sol.
Prova della correttezza della riduzione.
Per la correttezza della riduzione si deve far vedere che <G,s> è un'istanza sì del problema del DHAMS sse f(<G,s>), come specificato sopra è un'istanza sì del DHAMT.
Prima facciamo vedere che <G,s> in DHAMS implica che f(<G,s>) è DHMAT.

Se <G,s> è un'istanza sì di DHAMS allora in G c'è un cammino hamiltoniano che parte da s, ma invertendo la direzione degli archi questo cammino è un cammino hamiltoniano che arriva in t, quindi anche <G',s> è un'istanza sì di DHAMT.

Prima facciamo vedere che <G,s> in DHAMT implica che <G,s> è in DHMAS.
Se <G,s> è un cammino hamiltoniano che termina in s in G, per la stessa ragione di prima rovesciando gli archi si ottiene un cammino hamiltoniano che parte da s. E quindi abbiamo dimostrato che <G,s> in DHAMT implica che <G,s> è in DHMAS.

La riduzione è polinomiale perché è addirittura lineare nell'input visto che si tratta solo di scrivere sul nastro di output la coppia. (v,u) per ogni coppia (u,v) letta sul nastro di input, aggiungendo poi il vertice s.

Per dimostrare che DHAMS è in NP si deve costruire un verificatore polinomiale per esso.
Il verificatore riceve in input un'istanza del problema <G,s> dove G è un grafo diretto e s è un vertice di G e come certificato una permutazione dei vertici di G. Il verificatore controlla che il primo vertice della permutazione sia s e poi se si tratta di un cammino, cioè se c'è un arco tra ogni coppia di vertici consecutivi nella permutazione. Questo controllo è polinomiale nella lunghezza della codifica di G, infatti per ogni coppia di vertici consecutivi deve solo esaminare l'input per controllare se c'è l'arco, poiché le coppie sono una meno del numero dei vertici potremmo concludere che il numero dei passi è in $O(n^2)$.

Poiché la riduzione polinomiale è transitiva e il problema del DHAMS è NP- hard per ipotesi abbiamo che per ogni A in NP A $\leq_p$ DHAMS e DHAMS $\leq_p$ DHAMT insieme implicano che per ogni A in NP A $\leq_p$ DHAMT. Quindi DHAMT è NP-hard.