Automi, calcolabilità e complessità
Prova di esame del 5 giugno 2017
Prof.ssa E. Fachini

Parte prima

1. Si dimostri che il problema del vuoto per la classe dei linguaggi regolari è decidibile.

Sol. Vedere libro di testo

2. Si spieghi perché la seguente affermazione è sbagliata: poiché $L = \{1^n0^m \text{ per } 0\leq n\leq m\leq 2n\}$ è un sottoinsieme di $K = \{1^n0^m \text{ per } 0\leq n\leq m\}$ e quest'ultimo è context-free allora anche L è context-free.

Sol. I due linguaggi sono context-free, ma non posso dire che L lo è perché sottoinsieme di K. Perché se fosse vero questo ogni linguaggio dovrebbe essere context-free, visto che tutte le parole su un qualsiasi alfabeto formano un linguaggio regolare e quindi context-free.

3. Si dimostri che il linguaggio $L = \{1^n0^m \text{ per } 0\leq n\leq m\leq 2n\}$ non è regolare.

Sol. Per ogni n prendiamo $w = 1^n0^n$ in L e facciamo vedere che comunque scomposta in tre sottoparole x,y e z, con la condizione che $|xy| \leq n$ $|y|>0$, esiste un i tale che xy^iz non è in L. Date le condizioni sulle lunghezze di xy e di y entrambe sono formate di soli 1 e quindi basta prendere i=0 per avere almeno un 1 in meno nella prima metà della parola e questa parola allora non è in L.

Automi, calcolabilità e complessità
Prova di esame del 5 giugno 2017
Prof.ssa E. Fachini

Parte seconda

1. Si dimostri che A_{TM} non è decidibile.
2. Sol. vedere libro di testo

3. E' vero che NTIME(n) $\subseteq$ SPACE($2^{O(n)}$)
   A. Sì, perchè ……

   B. Possiamo dare un limite superiore più basso NTIME(n) $\subseteq$ SPACE(….) perchè ….

Sol.

A. E' vero che NTIME(n) $\subseteq$ SPACE($2^{O(n)}$) perché sappiamo che possiamo costruire una TM T' equivalente a una NTM T data con complessità di tempo $t_T(n)$, con T' di complessità di tempo $t_{T'}(n) = 2^{O(t_T(n))}$. Nel nostro caso $t_T(n) = O(n)$ e quindi $t_{T'}(n) = 2^{O(n)}$ e sapendo che $s(n) \leq t(n)$, per ogni TM, si conclude.
B. Si può migliorare il limite perché se $t_T(n) = O(n)$ allora anche $s_T(n) = O(n)$ ed esaminando la costruzione della TM equivalente a una NTM T dal punto di vista dello spazio si trova che su ognuno dei nastri della macchina deterministica l'occupazione in spazio è lineare:
   - sul primo nastro c'è l'input
   - sul secondo nastro si simula una computazione della NTM e sappiamo che per questa $s_T(n) = O(n)$
   - sul terzo nastro c'è la stringa guida che è lunga $t_T(n) = O(n)$
   - sul quarto nastro c'è un contatore che contiene al più $2^{O(n)}$ per contare i rifiuti e questo numero in binario occupa O(n).

   Poiché la TM a un solo nastro equivalente ha la stessa occupazione in spazio, possiamo concludere che
   NTIME(n) $\subseteq$ SPACE(n)

In alternativa, usando il teorema di Savitch, sulla base del fatto che $s(n) \leq t(n)$ per ogni NTM, si ottiene NTIME(n) $\subseteq$ NSPACE(n) $\subseteq$ SPACE(n^2), che è comunque meglio del limite del punto A.

4. Si consideri il linguaggio L = {<M> | M è una TM e L(M) = {1^n0^n per 0≤n} }. Si costruisca una riduzione da A_{TM} a L. L è indecidibile? Si motivi la risposta.

Sol. La riduzione deve mandare un'istanza di A_{TM} , <T,w>, in un'istanza di L, M, in modo tale che <T,w> è in A_{TM} sse L è in L.
La riduzione è calcolata dalla seguente TM:
R
input <T,w>
output: la codifica della TM M di seguito descritta.

    M
    input x
    if x non è della forma 1^n0^n per una qualche n≥0 then rifiuta
    else
        esegui T su w
        if T accetta w then accetta
        if T rifiuta then rifiuta

Se T accetta w allora L(M) = {1^n0^n per 0≤n} altrimenti L(M)=∅ e quindi la riduzione è corretta.
In virtù della riduzione L è indecidibile, infatti se si disponesse di una TM che decide L, si potrebbe usarlo per decidere A_{TM} . La TM che decide A è la composizione in sequenza di R che calcola la riduzione e della TM che decide L .