Automi, calcolabilità e complessità
Prova di esame del 5 luglio 2019
Prof.ssa E. Fachini

1. Si dimostri che il problema del vuoto per DFA, cioè se un DFA A accetta un linguaggio NON vuoto, è decidibile descrivendo un algoritmo che lo risolve. Si analizzi la complessità dell'algoritmo presentato.

Sol. Vedere ultimi lucidi in
http://twiki.di.uniroma1.it/pub/Calcolabilita/WebHome/DFA1Intr.pdf

2. Si consideri il problema di stabilire se due TM sono tali che l'unione dei linguaggi da esse accettati coincide con la totalità delle parole in input, formalmente il problema è descritto dal seguente linguaggio:
   $UTOT_{TM} = \{<T,T'> \mid T \text{ e } T' \text{ sono TM e } L(T) \cup L(T') = \Sigma^*\}$.

Si costruisca una riduzione basata su una funzione da A_{TM} a $UTOT_{TM}$.
Se ne deduca che il problema è indecidibile, esplicitandone la ragione.

Sol. Una riduzione da A_{TM} a $UTOT_{TM}$ deve associare a istanze di A_{TM} istanze di $UTOT_{TM}$ in modo tale che a istanze sì di A_{TM} corrispondano istanze sì di $UTOT_{TM}$ e a istanze no di A_{TM} istanze no di $UTOT_{TM}$.
Un'istanza di è una coppia formata da una TM e da un suo input, <M,w>, e dobbiamo <u>costruire</u> un'istanza del problema della totalità dell'unione da associarvi, cioè una coppia di TM tali che $L(T) \cup L(T') = \Sigma^*$ sse w è in L(M). Allora potremmo fare in modo che la prima macchina non accetti niente e che il comportamento dell'altra dipenda invece da quello di M su w. T' potrebbe accettare ogni parola dell'alfabeto input se M accetta w e non accettare niente in caso contrario. In questo modo $L(T) = \varnothing$ in ogni caso e invece $L(T') = \Sigma^*$ se w è in L(M) e $L(T') = \varnothing$ altrimenti. Per ottenere questo risultato dobbiamo definire la TM R che calcola la funzione di riduzione come segue:

R: input <M,w>
Output <T,T'>
La codifica delle TM T e T' è basata sulle seguenti definizioni delle due TM:
T: input x
rifiuta
T': input x
esegui M su w
se M accetta w accetta x
se M rifiuta w rifiuta x

Controlliamo la correttezza di R:

Se <M,w> è in A_{TM} allora M accetta w e quindi $L(T') = \Sigma^*$ e $L(T) \cup L(T') = \Sigma^*$ e quindi <T,T'> è in $UTOT_{TM}$. Se invece <M,w> non è in A_{TM} allora M rifiuta w o non si ferma su w e allora $L(T') = \varnothing$ e quindi anche $L(T) \cup L(T') = \varnothing$, dunque <T,T'> non è in $UTOT_{TM}$.

La non decidibilità di $UTOT_{TM}$ deriva dalla riduzione perché se disponessimo di una TM che decide $UTOT_{TM}$ allora combinando in sequenza la TM R che calcola la riduzione e questa ipotetica TM per $UTOT_{TM}$ otterremmo una TM che decide A_{TM}.

3. Sia A un problema in SPACE(n^3) e B un problema che si riduce polinomialmente ad A. E' vero che anche B è in SPACE(n^3)? Si motivi la risposta e in caso di risposta no, sia dia la classe di spazio per B.

Sol. Se B si riduce polinomialmente ad A vuol dire che esiste una TM R che ad ogni istanza di B associa un'istanza di A, in modo tale che a istanze sì corrispondano istanze sì e a istanze no istanze no, calcolabile in tempo polinomiale, diciamo $O(n^k)$. Poiché sapendo il tempo possiamo limitare lo spazio possiamo dire che anche la complessità di spazio di R è in $O(n^k)$. Componendo in sequenza la R con la TM che decide A otteniamo una TM che decide B, la cui complessità di spazio è la somma delle complessità di spazio delle due TM, $O(n^k) + O(n^3) = O(n^{\max(k,3)})$. Dunque B è in SPACE($n^3$) se $k \leq 3$ e non lo è altrimenti.