Automi, calcolabilità e complessità
Prova di esame del 14 gennaio 2019 - Prof.ssa E. Fachini

1) Si dimostri il Pumping Lemma per i linguaggi regolari, dandone per prima cosa l'enunciato.

Vedi testo.

2) Si dimostri che se $A \leq_m A_{TM}$ allora A è Turing riconoscibile. Cosa possiamo concludere su A e su ¬A se invece $\neg A_{TM} \leq_m A$? Si dimostri la risposta. E' possibile costruire una riduzione da $\neg A_{TM}$ a $L=\{0^n1^m \mid n,m \geq 0\}$? Si motivi la risposta.

Sol.
Dalla prima riduzione deduciamo che A è Turing riconoscibile. Infatti, poiché A_{TM} è Turing riconoscibile, una macchina di Turing che riconosce A si ottiene componendo in sequenza quella che calcola la riduzione da A ad A_{TM} e la macchina di Turing che riconosce A_{TM}. Se invece consideriamo l'altra riduzione concludiamo che A non è Turing riconoscibile, perché esiste una riduzione ad esso da un linguaggio che non è Turing riconoscibile. Se infatti A fosse Turing riconoscibile allora potrei costruire una macchina di Turing per $\neg A_{TM}$. Per quanto riguarda ¬A invece si può concludere che si tratta di un linguaggio indecidibile perché c'è una riduzione da A_{TM} a ¬A.
Ogni linguaggio regolare è decidibile e quindi anche L. Non è possibile costruire una riduzione da A_{TM} perché questa mi porterebbe a dedurre che L è indecidibile.

3) Se L è in NTIME(nlg n), qual'è la migliore funzione f tale che L è in SPACE(f(n))? Si motivi la risposta nel dettaglio.

Sol. Sappiamo che NTIME(nlgn) ⊆ NSPACE(nlgn), perché se un linguaggio è riconosciuto da una TM in tempo O(nlgn), allora lo spazio di memoria non può essere superiore, visto che al più in ogni passo di calcolo si sposta la testina di lettura su una nuova cella. Per il teorema di Savitch possiamo concludere che NSPACE(nlgn) ⊆ NSPACE(n^2lg^2n) e quindi che NTIME(nlgn) ⊆ NSPACE(n^2lg^2n).
Ma se ripensiamo alla prima costruzione vista per costruire una TM equivalente a una NTM data possiamo dare un limite migliore. Infatti la TM T a 4 nastri che riconosce lo stesso linguaggio della NTM M data, utilizza O(n) spazio sul primo nastro, O(nlgn) sul nastro di lavoro, visto che esegue una delle possibili computazioni sull'input x di dimensione n, O(nlgn) sul terzo nastro perché le stringhe guida che consentono di eseguire una alla volta le scelte possibili nondeterministicamente è lunga al più O(nlgn), e infine il quarto nastro contiene il numero delle foglie del livello che si sta considerando e quindi al più $2^{O(nlgn)}$ che in binario occupa spazio O(nlg n). Poiché passando a una TM a un solo nastro l'occupazione in spazio non cambia, otteniamo che NTIME(nlgn) ⊆ SPACE(nlgn).