Automi, calcolabilità e complessità
Prova di esame del 11 giugno 2019
Prof.ssa E. Fachini

1. Il problema della totalità per i linguaggi Turing riconoscibili non è decidibile. Lo si dimostri costruendo una riduzione basata su una funzione da A_{TM} a TOT_{TM} = {<T> | T è una TM e L(T)= Σ* }.

Sol.
Costruiamo la TM R che calcola la riduzione, cioè la funzione che associa istanze di A_{TM} a istanze di TOT_{TM} in modo tale che a istanze sì di A_{TM} corrispondano istanze sì di TOT_{TM} e a istanze no di A_{TM} istanze no di TOT_{TM}.
Prendiamo Σ= {0,1} per semplicità

Sia R:
input <M,w>
output T così definita:
T: input x
  esegui M su w e
  se M accetta w, accetta x
  se M rifiuta w, rifiuta x

L(T)= {0,1}* se M accetta w, mentre L(T) = ∅ altrimenti, quindi la riduzione è corretta. Infatti se M rifiuta w o se M non si ferma su w allora L(T) = ∅.

2. L è un linguaggio sull'alfabeto {0,1} in cui ogni parola contiene almeno un 1 nella seconda metà. Formalmente L = {uv I u è in {0,1}*, v in {0,1}*1{0,1}* e IuI ≥ IvI}. Si costruisca un PDA che accetta L. Se ne descriva il funzionamento a parole prima di costruire il grafo delle transizioni.

   Come al solito come primo passo si impila un marcatore di fine pila, diciamo il dollaro. L'automa poi deve impilare un simbolo, diciamo X, per ogni lettera in input che legge, e non deterministicamente leggendo un 1 elimina un elemento dalla pila, andando in un nuovo stato dove si continua semplicemente a togliere dalla pila una X per ogni lettera letta in input. Se si termina l'input e in cima alla pila c'è il dollaro, vuol dire che abbiamo tolto dalla pila tante X quante lettere lette in input compreso l'uno e quindi che l'uno segnava l'inizio della seconda metà della parola. Se invece la lettura dell'input termina con una X in cima alla pila vuol dire che l'uno che si è utilizzato per il cambio di modalità sulla pila era più a destra della metà della parola, almeno di 1. In entrambi i casi la parola deve essere rifiutata. Se invece si leggesse un input con in cima alla pila il dollaro la parola deve essere rifiutata, perchè in questo caso l'uno che ha determinato il cambio di modalità sulla pila divide la parola in una parte iniziale di lunghezza inferiore alla parte finale.

3. Si dimostri che ogni linguaggio PSPACE-hard è anche NP-hard.

Sol. Per definizione un linguaggio A è PSPACE-hard se ogni linguaggio in PSPACE si riduce polinomialmente ad esso.Un linguaggio A si dice NP hard se ogni linguaggio in NP si riduce polinomialmente ad esso.
NP è contenuto in NPSPACE perchè il tempo limita lo spazio e poi NPSPACE è contenuto in PSPACE per il teorema di Savitch. Se A è PSPACE-hard è anche NP-hard perché ogni linguaggio in PSPACE si riduce ad A, per definizione, ma tra quei linguaggi ci sono anche tutti quelli in NP, e quindi banalmente A è anche NP-hard.