Sommario

Proprietà indecidibili delle TM.

Proprietà non Turing riconoscibili delle TM.

INFIN_{TM}

Il problema dell'infinito per le TM:
INFIN_{TM} = {<M> | M è in TM e L(M) è infinito} è deciso da qualche TM?

Prova della non decidibilità:

Per riduzione da A_{TM}, $A_{TM} \leq_m \mathrm{INFIN}_{TM}$.

Ad un input per A_{TM}, < M,w>, associamo <T> , dove T è una TM, in modo tale che w è in L(M) (< M,w> è in A_{TM}) sse L(T) è infinito (e quindi <T> è in INFIN_{TM}).

Adottiamo l'alfabeto binario.

La TM T è così definita:
input x
esegui M su w e
se M accetta w, accetta x
se M rifiuta w, rifiuta x.

Se M accetta w allora T accetta ogni parola in {0,1}*, mentre se M non accetta w allora L(T) = ∅, quindi abbiamo ottenuto la riduzione f voluta:
w è in L(M) (< M,w> è in A_{TM}) sse (f(<M,w>) = <T> è in INFIN_{TM}) L(T) è infinito.

La funzione di riduzione è Turing calcolabile?

La funzione di riduzione è Turing calcolabile?

La riduzione f voluta, associa ad un input per A_{TM}, < M,w>, una TM <T>, in modo tale che < M,w> è in A_{TM} sse <T> è in $INFIN_{TM}$.

La TM che calcola la funzione di riduzione prende in input <M,w> e costruisce T.
La TM T non è difficile da costruire. Nel suo stato iniziale, qualsiasi simbolo legga nella prima cella passa a simulare M su w e si comporta sul suo input esattamente come fa M su w.

Regolarità per TM

REG_{TM} = { <T> | T è una TM e L(T) è regolare} è indecidibile.

Prova. Per riduzione da A_{TM} . Mostriamo che $A_{TM} \leq_m REG_{TM}$.

Ad un input per A_{TM}, < M,w>, associamo <T> , dove T è una TM, in modo tale che w è in L(M) (< M,w> è in A_{TM}) sse L(T) è regolare (e quindi <T> è in REG_{TM}).

Adottiamo l'alfabeto binario.

La TM T è così definita:
input x
se x = 0^n1^n , per qualche n, allora accetta
altrimenti (x non è della forma 0^n1^n) esegui M su w e
    se M accetta w, accetta x
    se M rifiuta w, rifiuta x.

Quindi L(T) accetta tutte le parole se M accetta w:
quelle della forma 0^n1^n in ogni caso, quando le riceve in input, e le altre se M accetta w.
Se invece M non accetta w le uniche parole accettate da T sono quelle della forma 0^n1^n , per qualche n. Quindi L(T) è regolare (<T> è in REG_{TM}) sse M accetta w (< M,w> è in A_{TM}).

Non Turing riconoscibilità

Il problema dell'equivalenza per TM:

EQ_{TM} = {<M,M'> | M,M' sono TM e L(M)=L(M')} non è Turing riconoscibile.

Osservazione 1: **se $A \leq_m B \Leftrightarrow \neg A \leq_m \neg B$**

Osservazione 2: **A_{TM} è Turing riconoscibile mentre $\neg A_{TM}$ non lo è.**

Osservazione 3: **Per provare che un qualsiasi problema B non è Turing riconoscibile dovremmo dimostrare $\neg A_{TM} \leq_m B$, ma sfruttando l'osservazione 1 possiamo ridurre A_{TM} al complemento di B, e cioè dimostrare che $A_{TM} \leq_m \neg B$.**

Equivalenza: EQ_{TM}

EQ_{TM} = {<M,M'> | M,M' sono TM e L(M)=L(M')} non è Turing riconoscibile.

Prova della non Turing riconoscibilità:

Riduciamo A_{TM} all'inequivalenza, cioè al complemento dell'equivalenza per TM:

$$A_{TM} \leq_m \neg EQ_{TM} .$$

Ad un input per A_{TM}, <M,w>, associamo <T1,T2>, la codifica di due TM T1 e T2, in modo tale che w è in L(M) sse L(T1)≠L(T2). Sempre sull'alfabeto binario.

La TM T1 è così definita:
input x
rifiuta

L(T1)= $\varnothing$

La TM T2 è così definita:
input x
esegui M su w
se M accetta w, accetta
se M rifiuta w , rifiuta.

Se w è in L(M) allora L(T2) ={0,1}*
mentre se w non è in L(M) allora L(T2) = $\varnothing$

quindi abbiamo ottenuto la riduzione voluta:
w è in L(M) sse L(T1)≠L(T2).

La funzione di riduzione è Turing calcolabile?

L'inequivalenza: $\neg Q_{TM}$

$\neg EQ_{TM}$ = {<M,M'> | M,M' sono TM e L(M)≠L(M')} è decidibile? NO!

Turing riconoscibile? NO!

Riduciamo A_{TM} al complemento dell'inequivalenza per TM, cioè all'equivalenza: $A_{TM} \leq_m EQ_{TM}$.

Ad un input per A_{TM}, <M,w>, associamo <T1,T2> la codifica di due TM T1e T2 tali che w è in L(M) sse L(T1)=L(T2). Sempre sull'alfabeto binario.

La TM T1 è così definita:
input x
accetta

L(T1)= {0,1}*

La TM T2 è così definita:
input x
esegui M su w
se M accetta w accetta
se M rifiuta, rifiuta.

Se w è in L(M) allora L(T2) = {0,1}*
mentre se w non è in L(M) allora L(T2) = ∅

quindi abbiamo ottenuto la riduzione voluta: w è in L(M) sse L(T1)=L(T2).