Sommario

- **Pumping lemma per i regolari**
- **esempi di uso del teorema per dimostrare che un linguaggio non è regolare**

PUMPING LEMMA: l'idea

Dato un DFA con n stati ci poniamo la seguente domanda:

ci sono condizioni sotto le quali si ha la certezza di avere un ciclo nel cammino determinato da una parola accettata?

Basta prendere parole di lunghezza maggiore o uguale a n:

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad \dots \quad x_n \quad \dots \quad x_{n+m}$

$p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5 \quad p_n \quad p_{n+1} \quad \dots \quad p_{n+m+1}$

qui $m \geq 0$

Tra gli stati $p_1, \dots, p_{n+1}$ ce n'è uno che si ripete.

Il principio della piccionaia!

PUMPING LEMMA

Bar-Hillel, Perles, Shamir (1961)

Primo enunciato: Se L è un linguaggio accettato da un DFA con n stati, allora tutte le parole w in L di lunghezza maggiore o uguale a n si possono ottenere come concatenazione di tre sottoparole, x,y e z tali che

1. **w = xyz e $|y|>0$**
3. **le parole $w_i = xy^iz$, per ogni $i \geq 0$ sono in L**

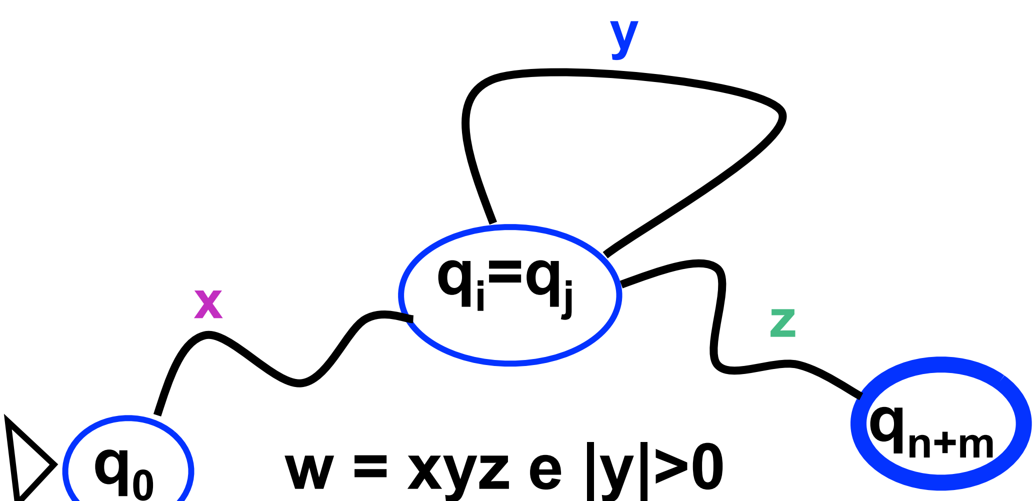
PUMPING LEMMA

Se w è di lunghezza maggiore o uguale a n:

w = $w_1 w_2 \ \dots \ w_n \ \dots \ x_{n+m}$ allora il cammino sul grafo di transizione è del tipo $q_0 \ q_1 \ \dots \ q_n \ q_{n+1} \dots q_{n+m}$, per un certo m≥0 e quindi c'è uno stato che si ripete.

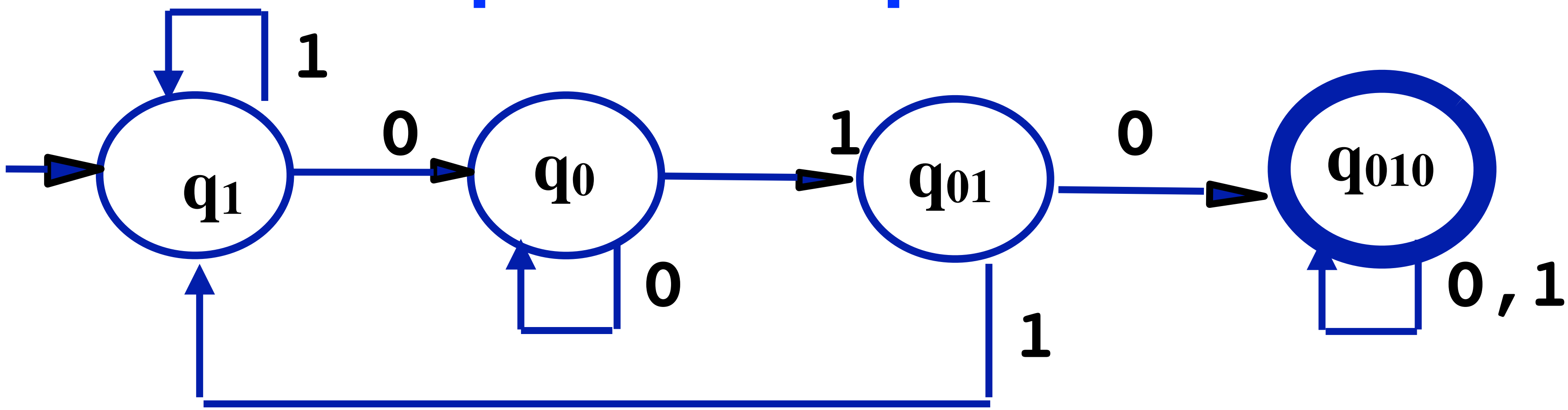
Sia $q_i = q_j$ allora si presenta una situazione come quella raffigurata, dove

$x=w_1 w_2 \ \dots \ w_i$,$y=w_{i+1} w_{i+2} \ \dots \ w_j$ e $z=w_{j+1} w_{j+2} \ \dots \ w_{n+m}$



Poiché il ciclo si può percorrere un numero qualsiasi di volte si ottiene un'infinità di parole accettate w_i = xy^iz, per ogni i≥0.

esempi di scomposizioni



Se prendiamo

w = 0 1 1 0 1 1 0 1 0

$p_1p_2p_3p_4p_5\,p_6p_7p_8\,p_9p_{10} = q_1q_0q_{01}q_1q_0q_{01}q_1q_0q_{01}q_{010}$

$p_1 = p_4$ **allora si ha la scomposizione**

x = ε, y =011 e z = 011010, ma anche

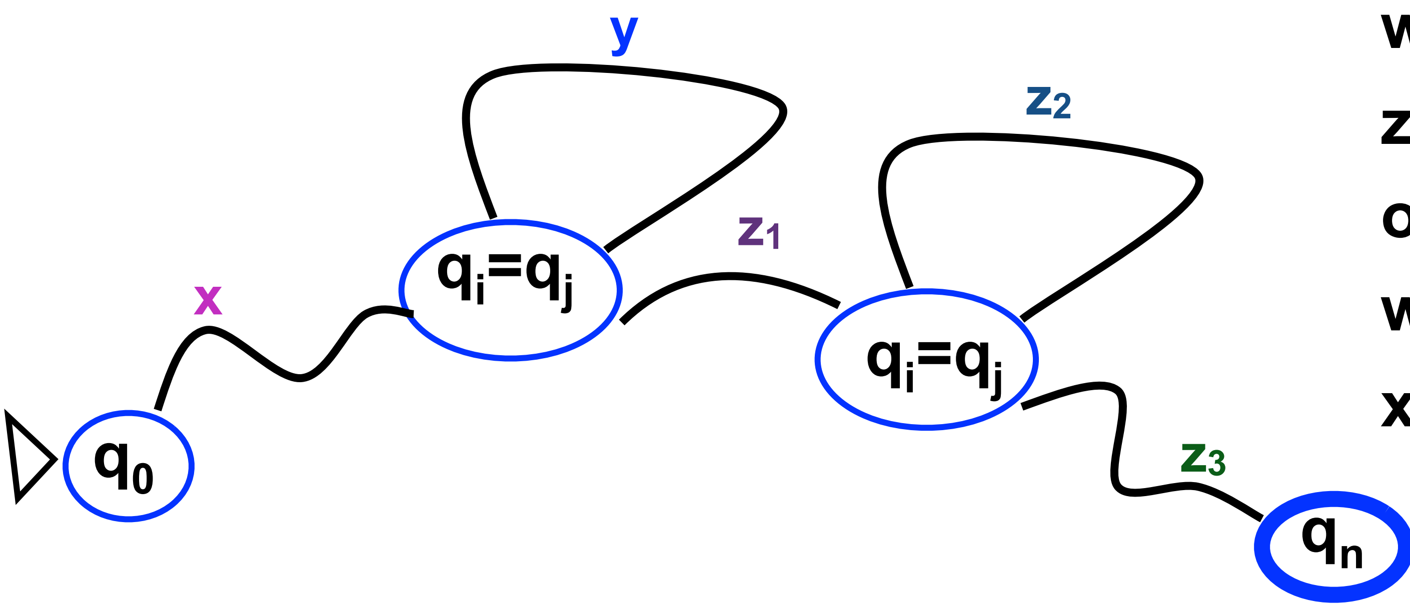
$p_2 = p_5$ **allora si ha la scomposizione**

x = 0, y = 110 e z = 11010 oppure

$p_4 = p_7$ **allora si ha la scomposizione**

x = 011, y =011 e z = 010

Enunciato più stringente



$w = xyz$ con

$z = z_1z_2z_3$

oppure

$w = x_1z_2z_3$ con

$x_1 = xyz_1$

Poiché basta una sola scomposizione, posso prendere il primo ciclo che si incontra sul cammino dallo stato iniziale.

Quanto al più può essere lungo il prefisso di una parola di lunghezza maggiore o uguale a n, perché contenga un ciclo? Ancora n.

Quindi possiamo imporre che $|xy| \leq n$.

PUMPING LEMMA

Enunciato definitivo: Se L è un linguaggio regolare, allora esiste un n tale che tutte le parole w in L di lunghezza maggiore o uguale a n si possono ottenere come concatenazione di tre sottoparole, x,y e z, w = xyz, e

1. $|y|>0$

é l'etichetta di un ciclo che almeno comprende due stati

2. $|xy| \leq n$

si assicura scegliendo il primo ciclo!

3. le parole $w_i = xy^iz$, per ogni $i \geq 0$ sono in L

Uso Pumping Lemma

Si usa per provare che un linguaggio NON è regolare.

Sia L un linguaggio che si sospetta non regolare.

Si tratta di dimostrare che per ogni n siamo in grado di individuare una parola w in L di lunghezza almeno n tale che ogni sua scomposizione nella concatenazione di tre sottoparole x,y,z con $|y|>0$, e $|xy|\leq n$ non ci consente concludere che $w_i = xy^iz$ è in L per ogni $i\geq 0$.

Questo vuol dire che siamo in grado di individuare almeno un indice j tale che $w_j = xy^jz$ non è in L.

Esempio

$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ non è regolare.

Per ogni n consideriamo le parole $w = a^n b^n$ (dato il linguaggio non c'è molta scelta!). Consideriamo le possibili scomposizioni $w = xyz$. Poiché $|xy| \leq n$, sia x che y sono di sole a quindi

1. $y = a^m$, per $m>0$, allora $w_i=x(a^m)^i z$ ha meno a di b se $i=0$.

E abbiamo considerato tutte le scomposizioni che rispettano il vincolo $|xy| \leq n$

Esempio

Se volessimo dimostrare che $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ non è regolare applicando il pumping lemma ma ignorando il vincolo 2, dovremmo considerare per ogni n le parole $w = a^n b^n$ e tutte le possibili scomposizioni $w = xyz$:

1. $y = a^m$, per $m>0$, allora $w_i=x(a^m)^i z$ ha meno a di b se $i=0$.

2. $y = b^m$, analogo

3. $y = a^m b^p$, con $m,p\geq 1$, allora $y = x(a^m b^p)^i z$ contiene una a che segue una b per ogni $i>0$.

Molto lavoro in più anche in questo semplice caso!

Uso Pumping Lemma

Si usa per provare che un linguaggio NON è regolare.

STRATEGIA DI PROVA

Sia L un linguaggio che si sospetta non regolare:

- **si prende un qualsiasi intero positivo k,**
- **si sceglie (questa è la parte creativa) z in L tale che $|z| \geq k$**
- **si mostra che per ogni fattorizzazione $z = uvw$ con $|v| \geq 1$ e $|uv| \leq k$, esiste un $i \geq 0$ tale che $uv^iw \notin L$.**

Esempio

$L = \{a^n b^m \mid n>m \geq 0\}$ non è regolare.

Per ogni n consideriamo le parole $w = a^{n+1}b^n$. Consideriamo le possibili scomposizioni $w = xyz$, con $|xy| \leq n$.

Allora $x = a^r$, per $r \geq 0$ e $y = a^s$, per $s>0$ e $z= a^t b^n$

con $r+s+t = n+1$ e $t\geq 1$

(in questo modo prendiamo tutte le scomposizioni che soddisfano la condizione $|xy|\leq n$)

Poi basta osservare che $xy^0 = a^r$, e

allora $w_0=xz = a^r a^t b^n$,ma $r+t \leq n$

perché $s\geq 1$ e $r+s+t = n+1$, quindi w_0 non è in L.

Esempio

Si dimostri, utilizzando il pumping lemma che i seguenti linguaggi non sono regolari.

L = {a^p | p è un numero primo}

L = {w#x | w,x in {0,1}* e x è una sottostringa di w}