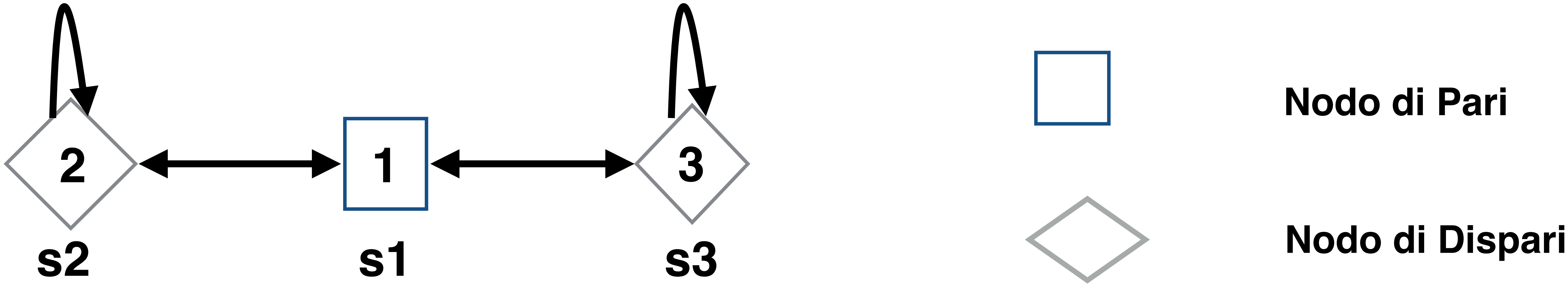
Parity games è in NP $\cap$ coNP, ma non sappiamo se sia in P

Si tratta di un gioco su grafi, con due giocatori, Pari e Dispari. Ogni vertice del grafo è di proprietà di Pari o di Dispari, ha una priorità associata e un arco uscente.
Un giocatore può muovere un token lungo gli archi del grafo se il token è su un vertice di sua proprietà a partire da un qualche vertice iniziale.
Una partita è un cammino infinito. In tal caso il vincitore è determinato dal minimo (in alternativa si prende il massimo) sulle priorità che occorrono infinite volte. Se tale minimo è pari vince Pari, altrimenti Dispari.

Parity Game: definizione ed esempio

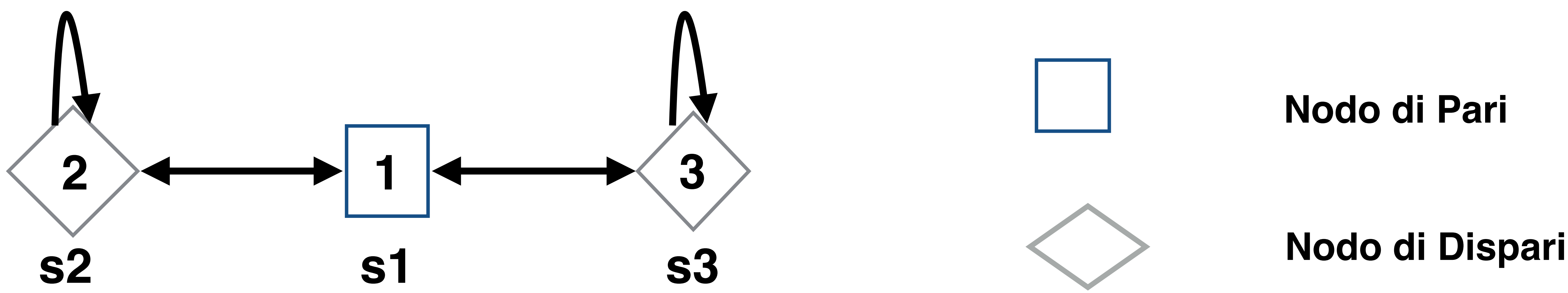
Quindi un ParityGame è una quadrupla $(V,E,p,V_{pari},V_{dispari})$, dove (V,E) è un grafo diretto, $p : V \longrightarrow N^+$ è una funzione che attribuisce le priorità, e $(V_{pari},V_{dispari})$ è una partizione dei vertici.
Esempio:



Esempio di Jeroen J.A. Keiren

Parity Game: definizione di vincitore

Dato un ParityGame $(V,E,p,V_{pari},V_{dispari})$, se p=v1,v2,v3,… è un cammino infinito in G,
sia inf(p) l'insieme delle priorità che occorrono infinite volte in p.
La partita p è vinta da Pari se min(inf(p)) è pari,
altrimenti è vinta da dispari.

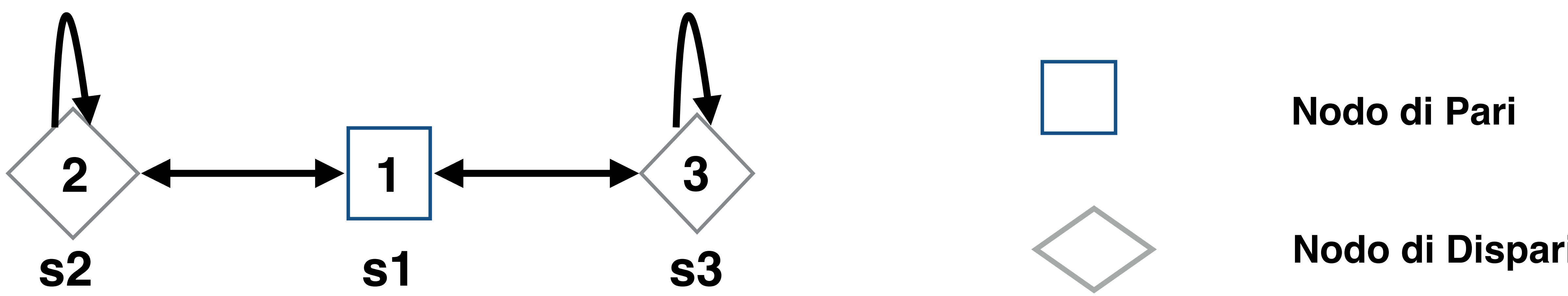


La partita s1s2s2s2s2… da chi è vinta?

inf(p)={2}, min(inf(p))=2, quindi vince Pari

Parity Game: secondo esempio di partita

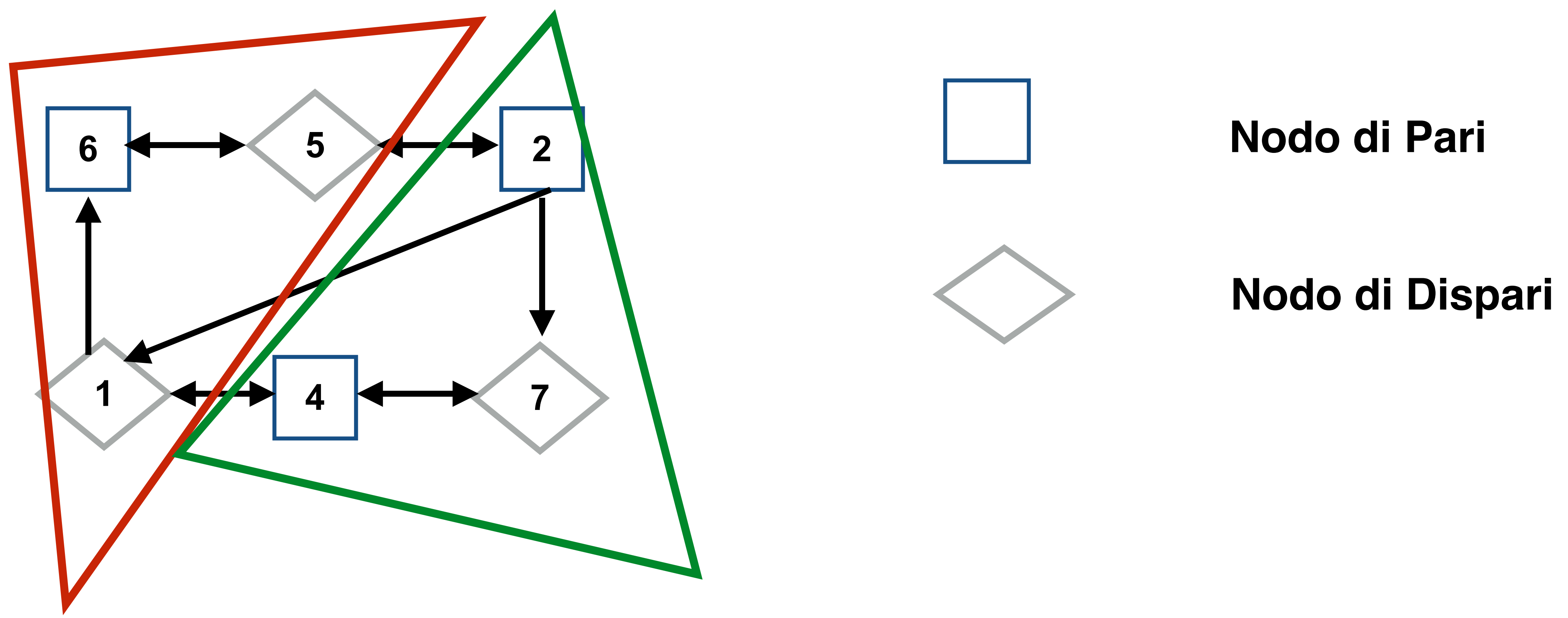
La partita p è vinta da Pari se min(inf(p)) è pari, altrimenti è vinta da dispari.



Chi vince la partita (s1s2s1s3)(s1s2s1s3)s1s2s1s3 …..?

inf(p)={1,2,3}, min(inf(p)) = 1, quindi vince Dispari

Parity Game: terzo esempio



Dispari può vincere se il gioco parte dal nodo di priorità 5 o 1 spostando il token, in entrambi i casi, sul nodo di priorità 6, quindi rimanendo nei nodi nel triangolo rosso.
Invece Pari può vincere nella zona nel triangolo verde spostando il suo token sul nodo di priorità 7, dal nodo a priorità 2 o da quello a priorità 4.

Esempio, modificato, di Jan Obdrˇz´alek

Parity Game: definizione di strategia

Dato un parity game su un grafo G , sia G_v il parity game associato con nodo di partenza v.

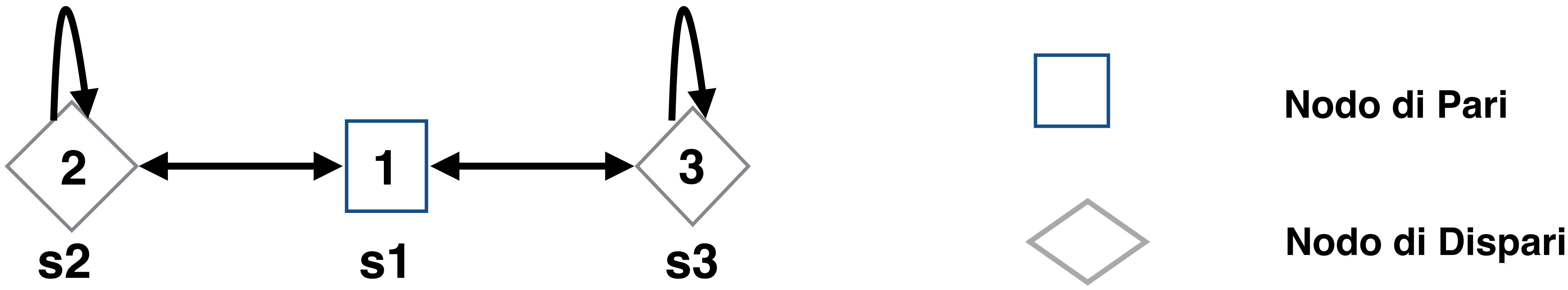
Una strategia, in G_v, per uno dei due giocatori consiste nella scelta del prossimo vertice, per ogni vertice di sua proprietà, in base al cammino già percorso.

Una strategia, in G_v, è vincente per un giocatore se questi vince adottandola in ogni partita che parte da v.

Il gioco si risolve determinando il vincitore di G_v per ogni vertice di partenza v.

Parity Game: definizione di strategia

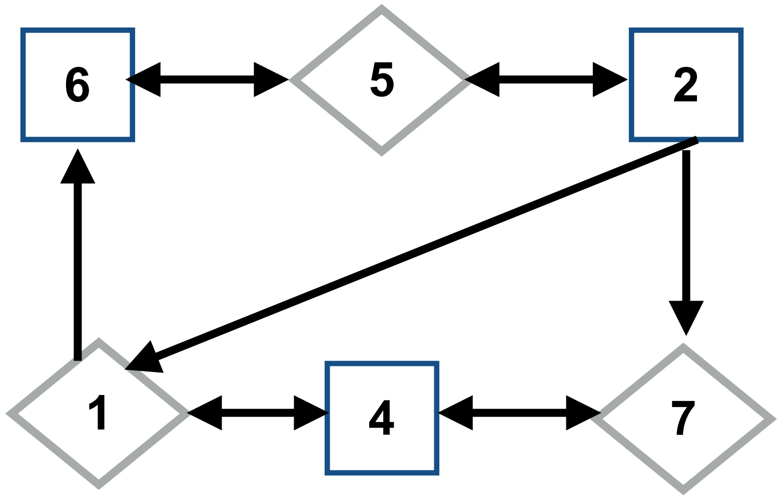
Si dimostra che se una strategia è vincente allora dipende solo dalla posizione corrente e non dalla storia della partita

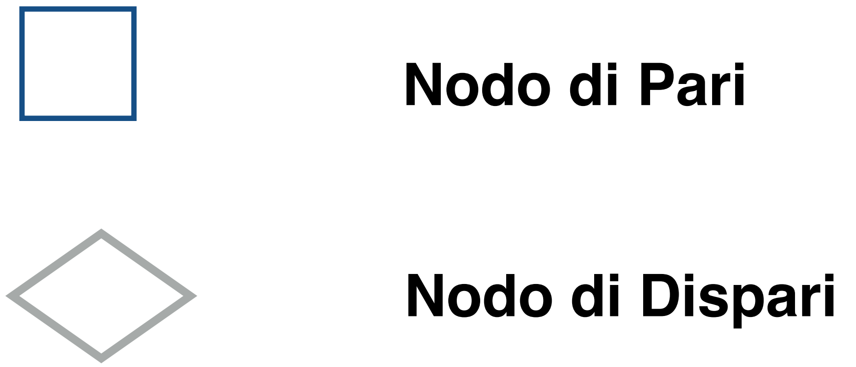


Se consideriamo il gioco con nodo di partenza s2, abbiamo che Dispari non ha una strategia vincente perché se resta in s2, vince Pari, e anche se va in s1, vince Pari tornando in s2.
Se il gioco parte da s1, Pari ha come strategia vincente lo spostamento in s2.
Se il gioco parte in s3, allora Dispari ha una strategia vincente rimanendo in s3. Notiamo che le strategie sono descritte solo in termini del prossimo nodo da raggiungere.

Parity Game: il problema

Il problema consiste nello stabilire quale giocatore ha una strategia vincente, per ogni possibile vertice di partenza v.





Nell'esempio Pari ha una strategia vincente per i nodi di priorità 2 e 4.
Se il gioco inizia nel nodo di priorità 7 vince Pari, che torna sempre in 7.
Se il gioco comincia nel nodo di priorità 6 vince Dispari.
I nodi di priorità 5 e 1 sono nodi con strategia vincente per Dispari, che va in ogni caso in 6.

Parity Game in NP e coNP

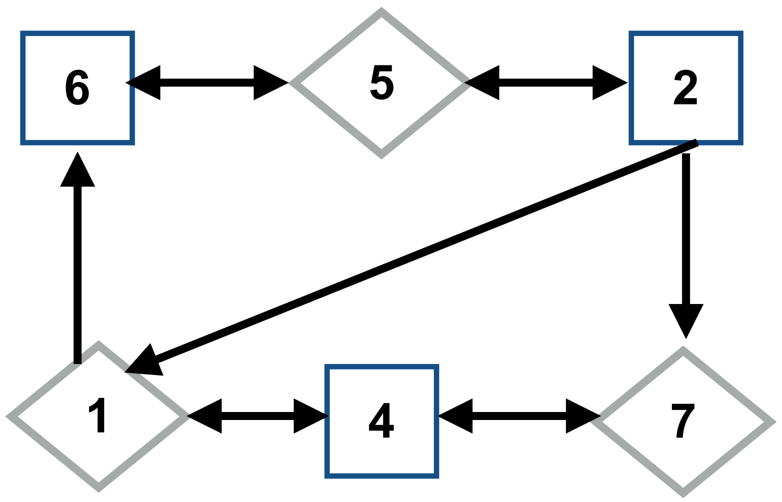
Parity games è in NP ∩ coNP.

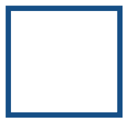
Prova di appartenenza a NP:

Dato un parity game ($V,E,p,V_{pari},V_{dispari}$), un certificato è una strategia.
Per verificare se Pari (o Dispari) ha una strategia vincente che parte da un vertice v, basta supporre che Pari la segua e controllare che in tal caso Dispari non può raggiungere un ciclo in cui una priorità dispari occorre infinite volte ed è minima rispetto alle altre priorità del ciclo.

Parity Game in NP e coNP

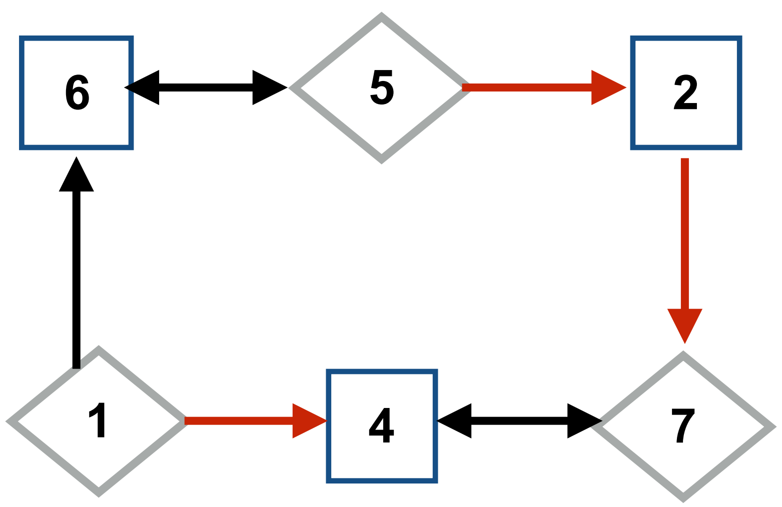
Per fare questo controllo eliminiamo dal grafo gli archi che non sono consistenti con la strategia.





Nodo di Pari

Nell'esempio, la strategia di Pari dal nodo di priorità 2, così come dal nodo di priorità 4 consiste nell'andare nel nodo di priorità 7, eliminiamo gli archi uscenti che porterebbero ad altre scelte:



Ora, partendo dal nodo 2, Pari sposta il gettone in 7, che può solo spostarlo in 4, che a sua volta può solo riportarlo in 7. Quindi nessun ciclo che renderebbe vincente dispari è raggiungibile da 2.
Con un ragionamento analogo si trattano tutti gli altri casi.