Sommario

- **Il problema della verità per formule booleane pienamente quantificate è PSPACE - completo**
- **PSPACE come la classe dei giochi.**
- **Il gioco geografico generalizzato è PSPACE - completo**

PSPACE completezza

Un linguaggio A è PSPACE completo se

1. **A è in PSPACE, cioè esiste una TM T che accetta A con complessità di spazio polinomiale.**

2. **ogni linguaggio in PSPACE si riduce in tempo polinomiale ad A**

Va sottolineato che si usa la riduzione polinomiale in tempo, anzichè una riduzione polinomiale in spazio.
Perchè?

Formule Booleane Quantificate

Le **formule booleane quantificate** sono le formule booleane dotate di quantificatori esistenziali e universali:

- $\forall x[x \vee y]$
- $\exists x \exists y[x \vee y]$
- $\forall x[x \vee x]$
- $\forall x[x]$
- $\forall x \exists y[(x \vee y) \wedge (\neg x \vee (\neg y))]$
- $\exists x \forall y[(x \vee y) \wedge (\neg x \vee (\neg y))]$

vera perchè per x = 1 si pone y=0 e per x=0, y=1

falsa perchè per x = 1 se y=0 va bene ma per y=1 no! E analogamente se x=0

Una **formula booleana pienamente quantificata** è un formula dove ogni variabile è quantificata.

Una **formula booleana pienamente quantificata è sempre vera o sempre falsa**

Una **formula booleana quantificata** è in **forma normale prenessa** se tutti i quantificatori appaiono all'inizio della formula.

Problema:

TQBF = {<φ> | φ è una formula pienamente quantificata vera}

TQBF è in PSPACE

Definizione ricorsiva di un decisore T per TQBF.

T=

Input φ

If φ non è quantificata, contiene solo costanti

then valutala e se il risultato è 1 accetta, altrimenti rifiuta

If $\varphi = \forall x\psi$, chiama ricorsivamente T su ψ prima con $x = 0$ e poi con $x = 1$.

Accetta se entrambe le chiamate accettano.

If $\varphi = \exists\psi$, chiama ricorsivamente T su ψ prima con $x = 0$ e poi con $x = 1$.

Accetta se una delle due chiamate accetta.

Per ogni chiamata lo spazio necessario è quello per il valore attribuito a una variabile, la profondità dello stack delle chiamate è il numero delle variabili, m. Quindi $s_T(m)$ è in $O(m)$

TQBF è PSPACE- completo

Si deve costruire una riduzione polinomiale per ogni linguaggio A in PSPACE, $A \leq_p TQBF$.
Detta M una TM polinomiale in spazio tale che L(M)=A e w un input per M, si associa a w, in tempo polinomiale, una formula booleana pienamente quantificata φ per la quale vale che

w è in A sse φ è in TQBF

L'idea della prova è simile a quella di Cook-Levin per SAT, ma usa l'idea di Savitch nella costruzione della formula, per mantenere la complessità di spazio polinomiale.

Ricordiamo che $t(n) \leq 2^{ks(n)}$ e quindi la formula "alla Cook-Levin" avrebbe lunghezza esponenziale.

GIOCHI

Qui un gioco è una competizione tra due contendenti che, seguendo delle regole date, devono raggiungere un determinato obiettivo.

I giochi sono strettamente legati alle formule booleane pienamente quantificate: a ogni formula possiamo associare un gioco e spesso a un gioco possiamo associare una formula.

Intanto il problema della verità per formule booleane pienamente quantificate può essere visto come un gioco:

Il gioco delle formule

Sia $\varphi = \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \ldots Q x_k \psi$ dove Q può essere $\exists$ o $\forall$

Siano All e Ex i contendenti che devono scegliere i valori di verità per le variabili, All per quelle quantificate universalmente ed Ex per quelle quantificate esistenzialmente.

L'ordine della scelta è determinato dall'ordine dei quantificatori all'inizio della formula, al termine delle scelte si valuta la formula e se la formula risulta vera vince Ex, altrimenti vince All.

Per questo PSPACE è spesso chiamata la classe dei giochi

Esempio del gioco delle formule

Sia $\varphi = \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \psi$ dove

$$\psi = [(x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)]$$

Ex sceglie per esempio 1 per x_1, allora All sceglie 0 per x_2 e quindi Ex prende 1 per x_3 e vince.

In realtà Ex può vincere sempre prendendo 1 per x_1 e poi l'opposto del valore che All attribuisce a x_2 per x_3, cioè Ex ha una strategia vincente. Se prendiamo un altro esempio prendendo

$$\psi = [(x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3)]$$

ora è All ad avere una strategia vincente perchè se prende 0 per x_2 qualunque sia il valore attribuito a x_3 una delle due clausole è falsa.

Formule e giochi

In un GIOCO un giocatore ha una strategia vincente se vince indipendentemente dalle mosse dell'avversario

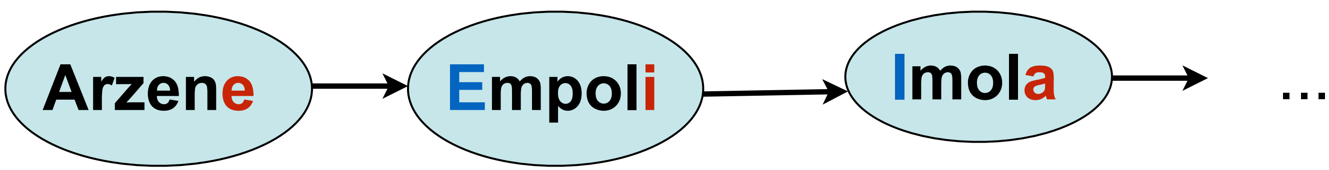
Problema:
GIOCO-FORMULE= {<φ> | φ è una formula pienamente quantificata e il giocatore Ex ha una strategia vincente per φ }

GIOCO-FORMULE è PSPACE-completo

GIOCO-FORMULE non è altro che un diverso modo di vedere TQBF = {<φ> | φ è una formula pienamente quantificata vera}

Il grafo geografico

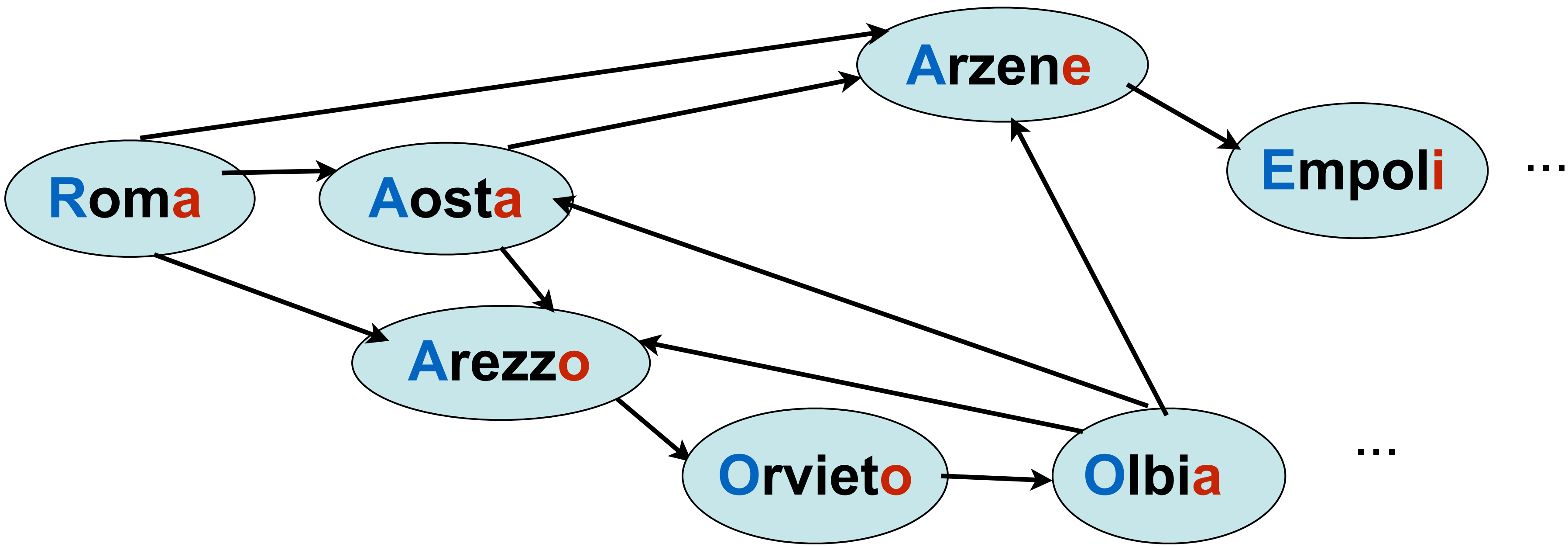
In questo gioco i due contendenti devono dare il nome di una città la cui lettera iniziale è uguale a quella finale della città scelta dall'altro giocatore, senza riusare i nomi.



Possiamo considerare allora ogni partita rappresentata da un grafo in cui c'è un arco da un nodo ad un altro se l'etichetta del primo termina con l'iniziale di quella del secondo.

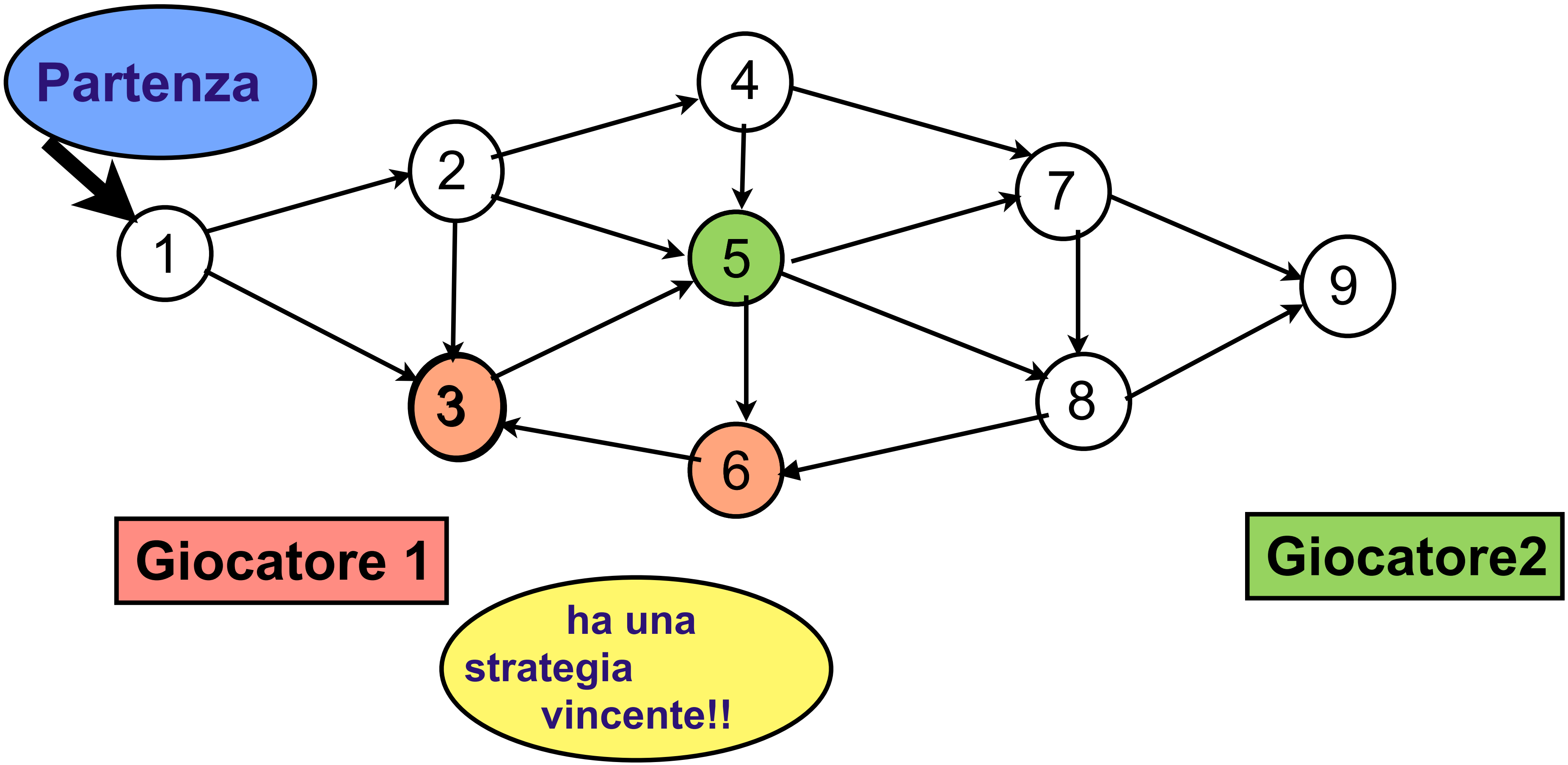
Il grafo geografico

Per esempio:



Un giocatore sceglie il nodo di partenza e poi a turno ognuno sceglie, tra quelli adiacenti, il prossimo nodo, così da costruire un cammino, con il vincolo di non creare cicli. Il primo che non riesce a estendere il cammino perde.

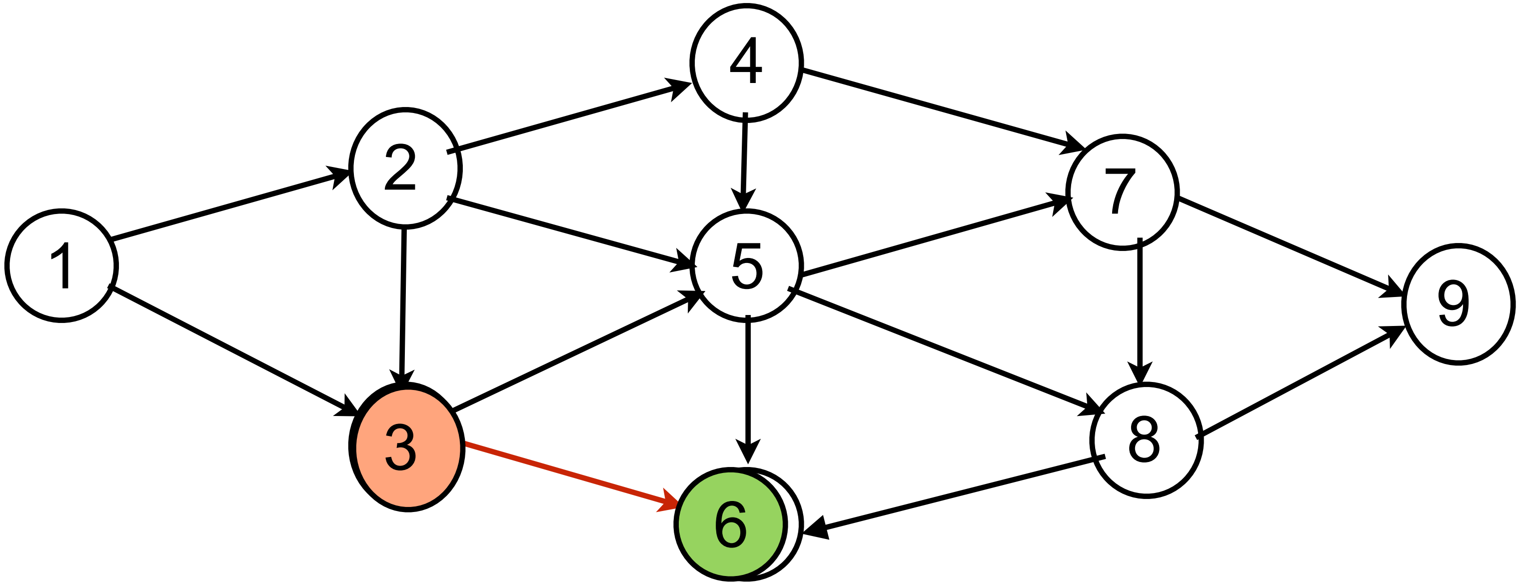
Il gioco geografico generalizzato



Il gioco geografico generalizzato

Esempio nel quale il giocatore 2 ha una strategia vincente

Caso 1



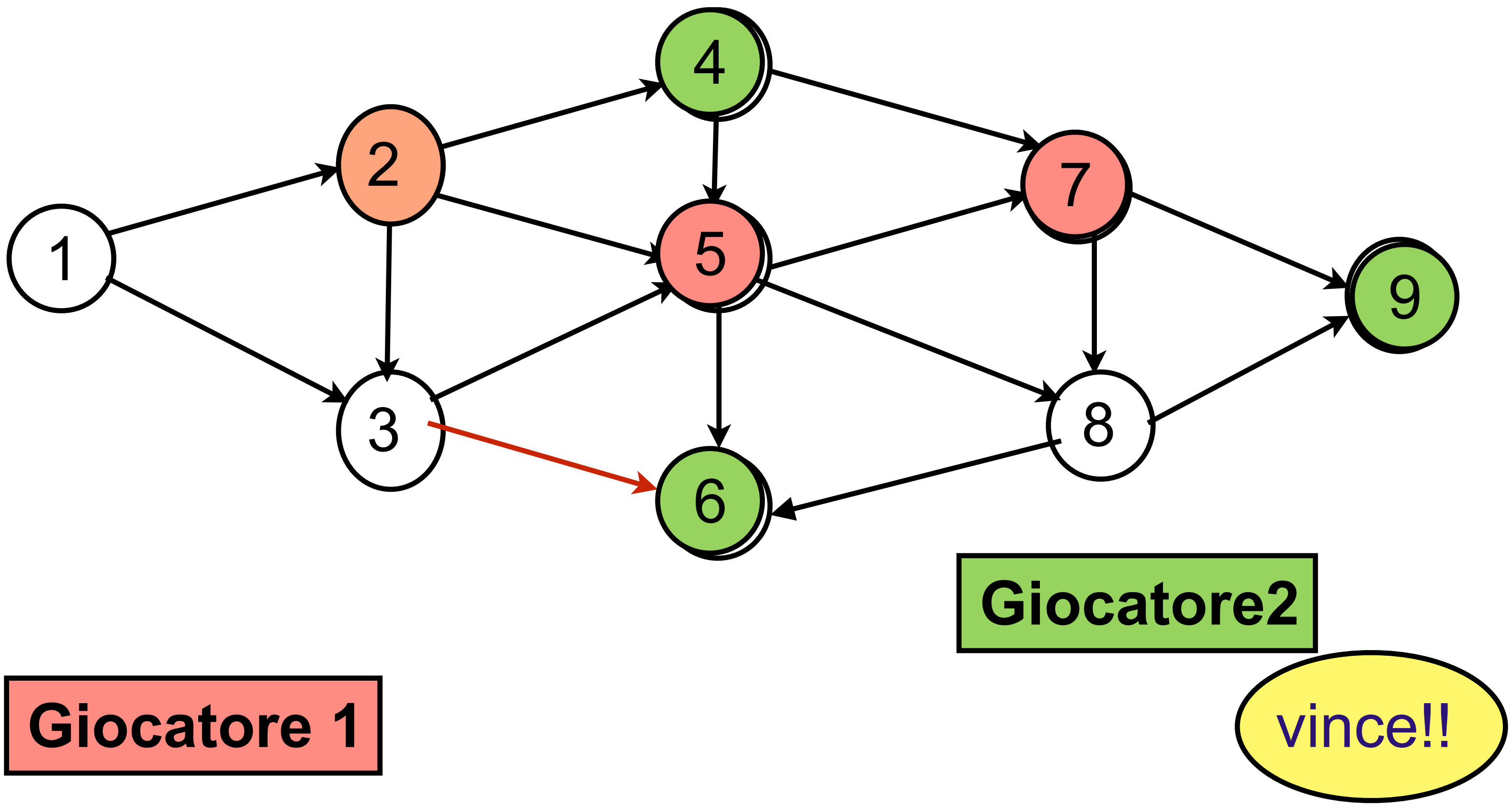
Giocatore 1

Giocatore2

vince!!

Il gioco geografico generalizzato

Esempio continuato strategia vincente del giocatore 2



GG

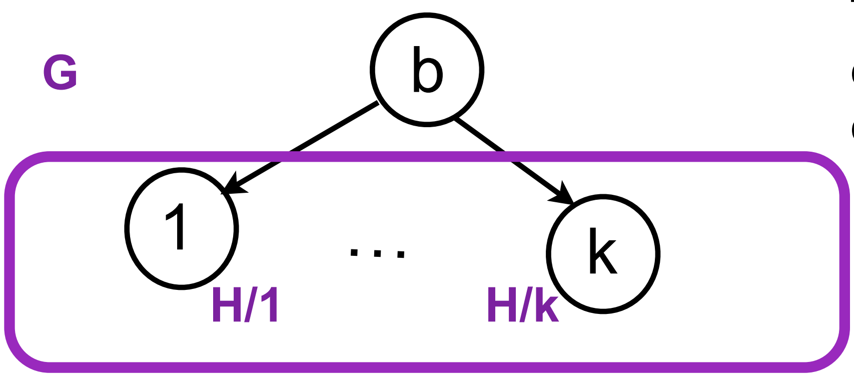
Problema:
GG={<G,b> | G è un grafo diretto e b un suo nodo e il giocatore 1 ha una strategia vincente su G}

GG è in PSPACE:l'algoritmo

T =
input <G,b>,

1. **Se b ha grado uscente 0, rifiuta, % il giocatore 1 non ha scelta e perde%**
2. **detti $b_1,\ldots,b_k$ i nodi raggiunti dagli archi uscenti da b, rimuovi b con tutti i suoi archi uscenti, ottenendo il grafo H.**
3. **per ognuno dei nodi $b_1,\ldots,b_k$, chiama ricorsivamente T su <H,b_i> e se tutte accettano, rifiuta, altrimenti accetta**

%se tutte accettano, il giocatore 2 ha una strategia vincente e quindi il giocatore 1 perde%



T <G,b> accetta se almeno una delle chiamate rifiuta, cioè il giocatore della chiamata perde ed è il giocatore 2.

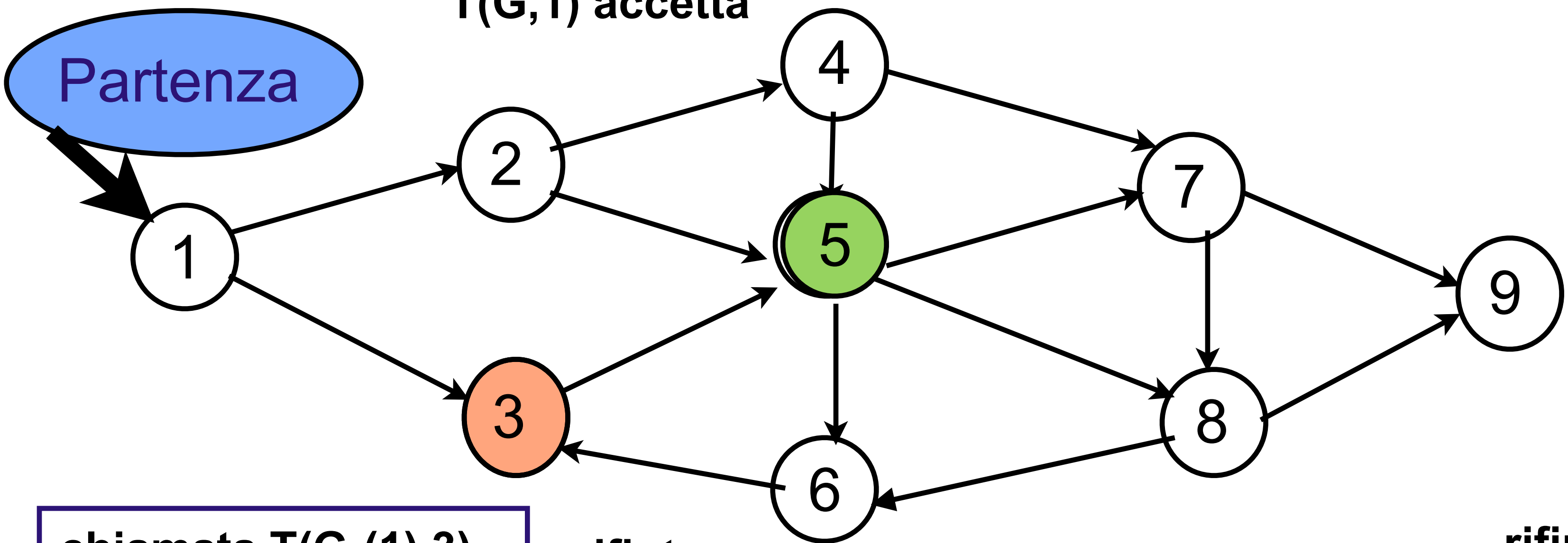
Per ogni chiamata lo spazio necessario è quello per il nodo scelto, la profondità dello stack delle chiamate è al più il numero dei nodi, n. Quindi $s_T(n)$ è in O(n log n)

Esempio 1

Giocatore 1

Giocatore2

T(G,1) accetta



chiamata T(G-(1),3) rifiuta

chiamata T(G-(1,3),5) accetta

chiamata T(G-(1,3,5),7)

accetta

chiamata T(G-(1,3,5,7),8)

accetta

chiamata T(G-(1,3,5,7,8),9) rifiuta

chiamata T(G-(1,3,5,7,8),6) rifiuta

chiamata T(G-(1,3,5,7),9) rifiuta

chiamata T(G-(1,3,5),6) rifiuta, vince 1

chiamata T(G-(1,3,5),8)

accetta

chiamata T(G-(1,3,5,8),9) rifiuta

chiamata T(G-(1,3,5,8),6) rifiuta

GG è PSPACE-complete

Data una formula φ, possiamo assumere che
1. il primo e l'ultimo quantificatore sia $\exists$, e che i quantificatori si alternano strettamente. (Se non fosse così, potremmo ottenere questa forma aggiungendo una nuova variabile quantificata opportunamente)
2. assumiamo che la parte libera da quantificatori di φ è in 3CNF

Quindi

$$\varphi = \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \ldots \exists x_k [c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m]$$

dove ogni c_i è la disgiunzione di 3 letterali.

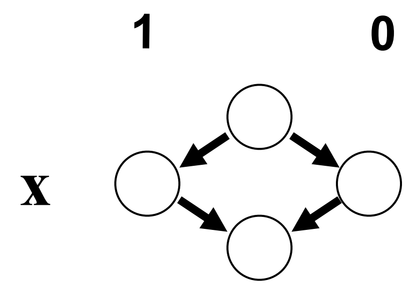
Ora mostriamo che GIOCO-FORMULE $\leq_p$ GG, e cioè associamo in tempo polinomiale a una formula φ una coppia <G,b> in modo tale che

$$\varphi \in \text{GIOCO-FORMULE} \text{ iff } \langle G,b \rangle \in GG$$

i.e., Ex ha una strategia vincente per φ sse il giocatore 1 ne ha una per <G,b>.

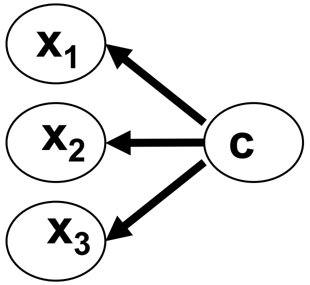
La costruzione di G: gadget

Per ogni variabile x creiamo un “gadget”: un rombo



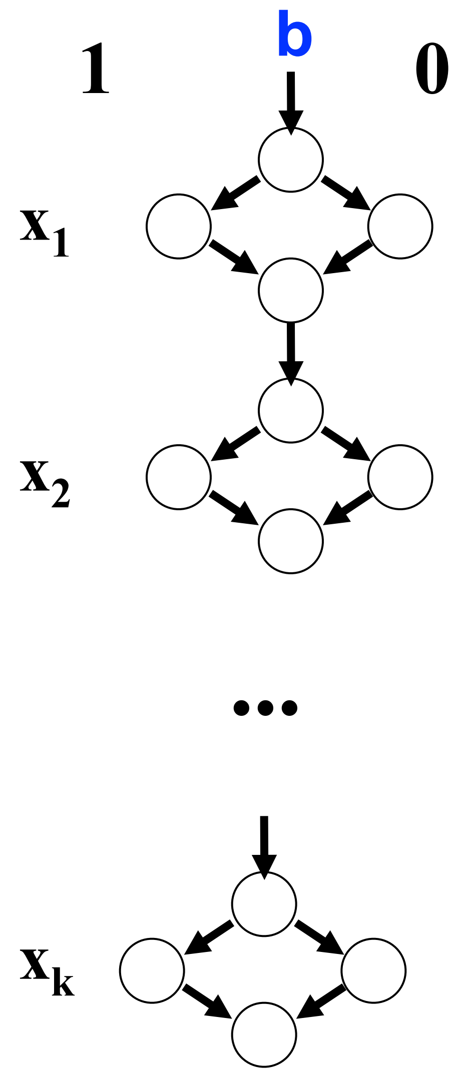
Le scelte sulla sinistra corrispondo all’attribuzione di 1 alla variabile nella formula e quelle sulla destra ad attribuire il valore 0

Per ogni clausola c creiamo un “gadget”: un albero, in cui un nodo corrisponde alla clausola e i tre figli ai letterali presenti nella clausola



La costruzione di G: parte sinistra

$\varphi =$
$\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \ldots \exists x_k [(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \ldots) \wedge \ldots$
$\wedge (\ldots)]$

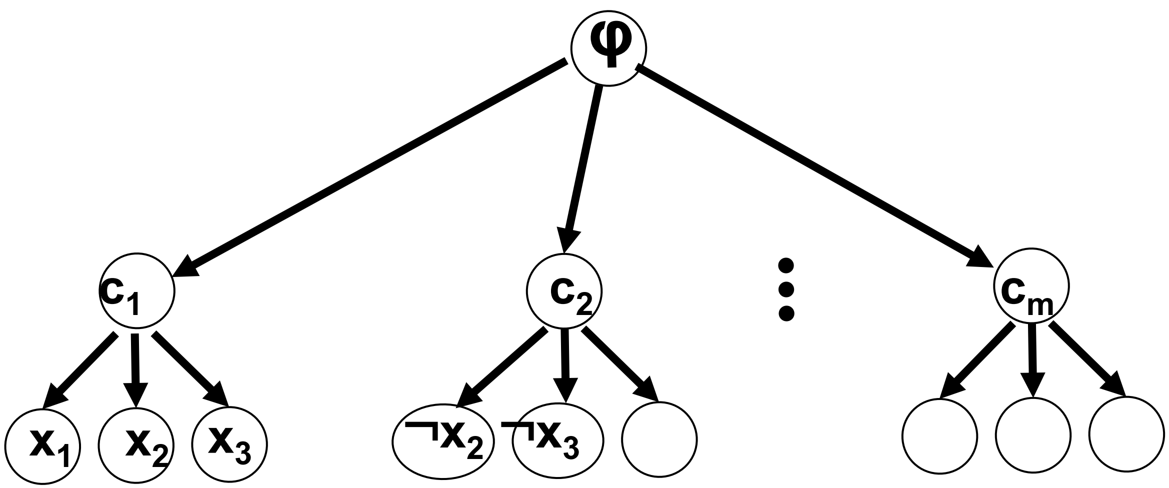


La parte sinistra di G si ottiene collegando i singoli rombi, relativi alle variabili, nell'ordine in cui compaiono i quantificatori e prendendo come nodo di partenza, b, il nodo senza archi entranti del primo rombo.

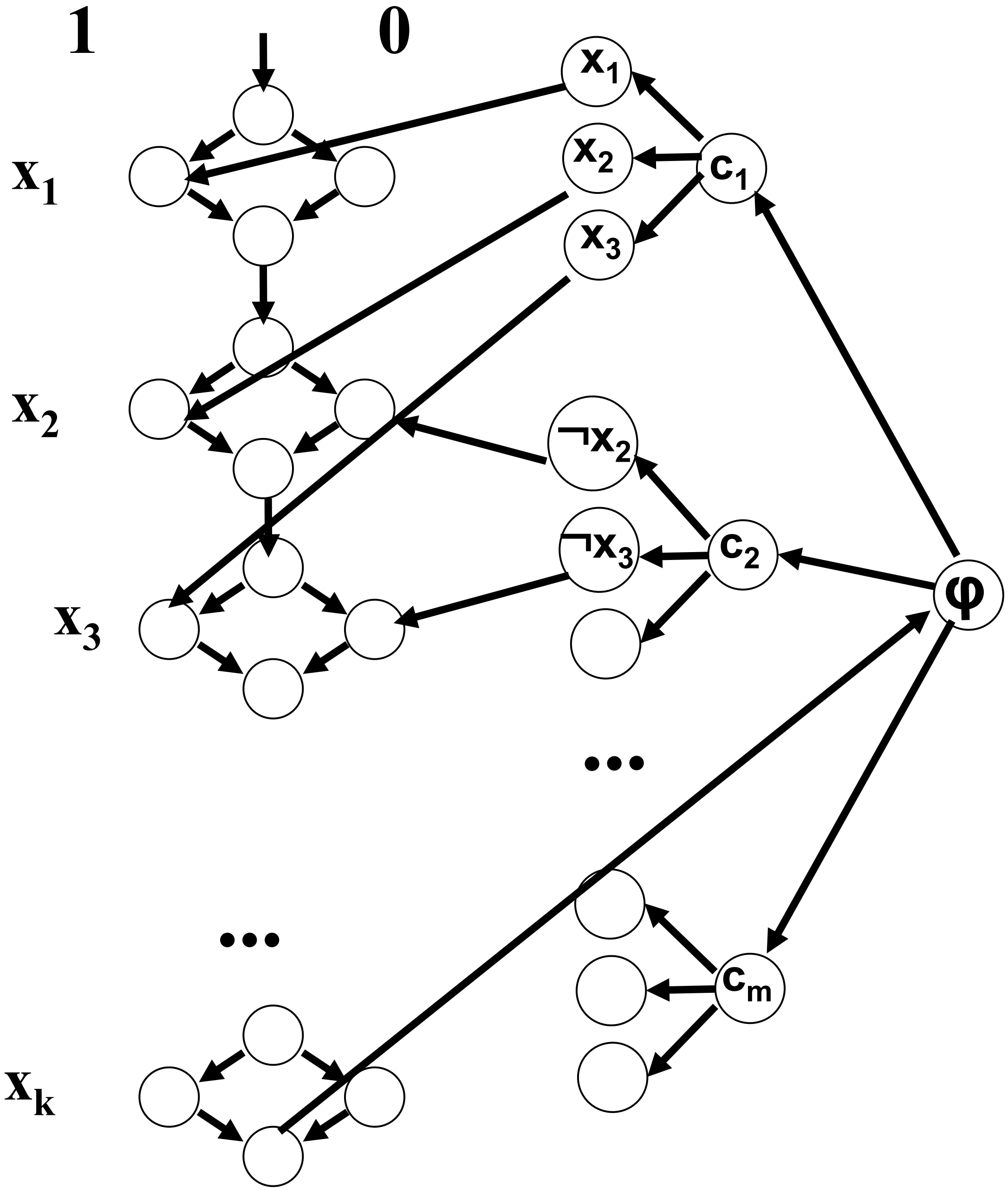
La costruzione di G: parte destra

$\varphi = \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \ldots \exists x_k [c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots c_m] =$
$\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \ldots \exists x_k [(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \ldots) \wedge \ldots \wedge (\ldots)]$

La parte destra di G si ottiene collegando i singoli alberi, relativi alle clausole, in un unico albero con radice in un nodo etichettato φ.



La costruzione di G: fine



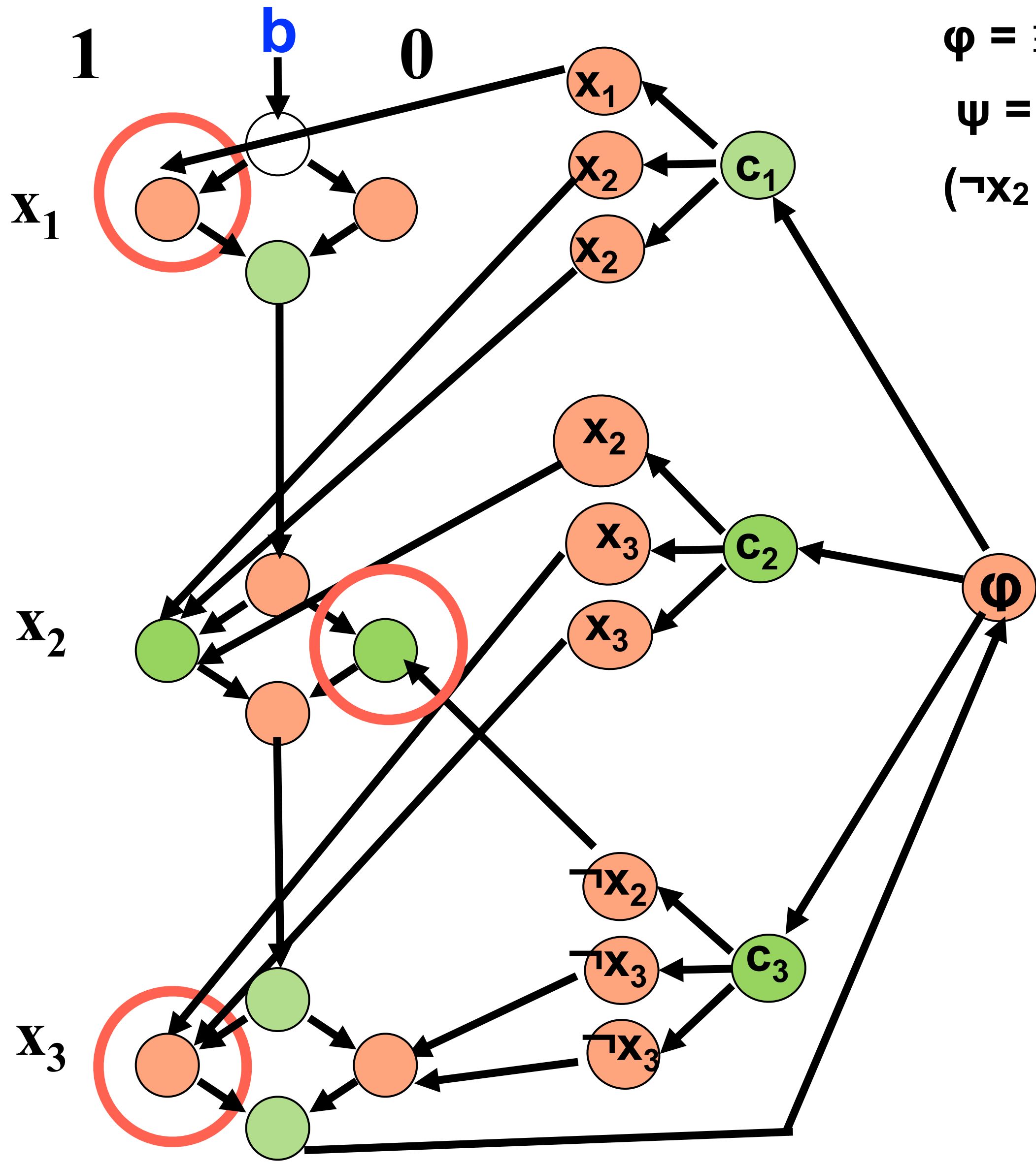
$\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \ldots \exists x_k [(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$
$\wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \ldots) \wedge \ldots \wedge (\ldots)]$

Colleghiamo ogni variabile positiva nel gadget delle clausole con il cammino a sinistra nei rombi e ogni variabile negata con quelli a destra.

Poi colleghiamo l'ultimo nodo dell'ultimo rombo con il nodo φ .

GIOCO-FORMULE $\leq_p$ GG

G 1 G 2



$\varphi = \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \psi$ dove

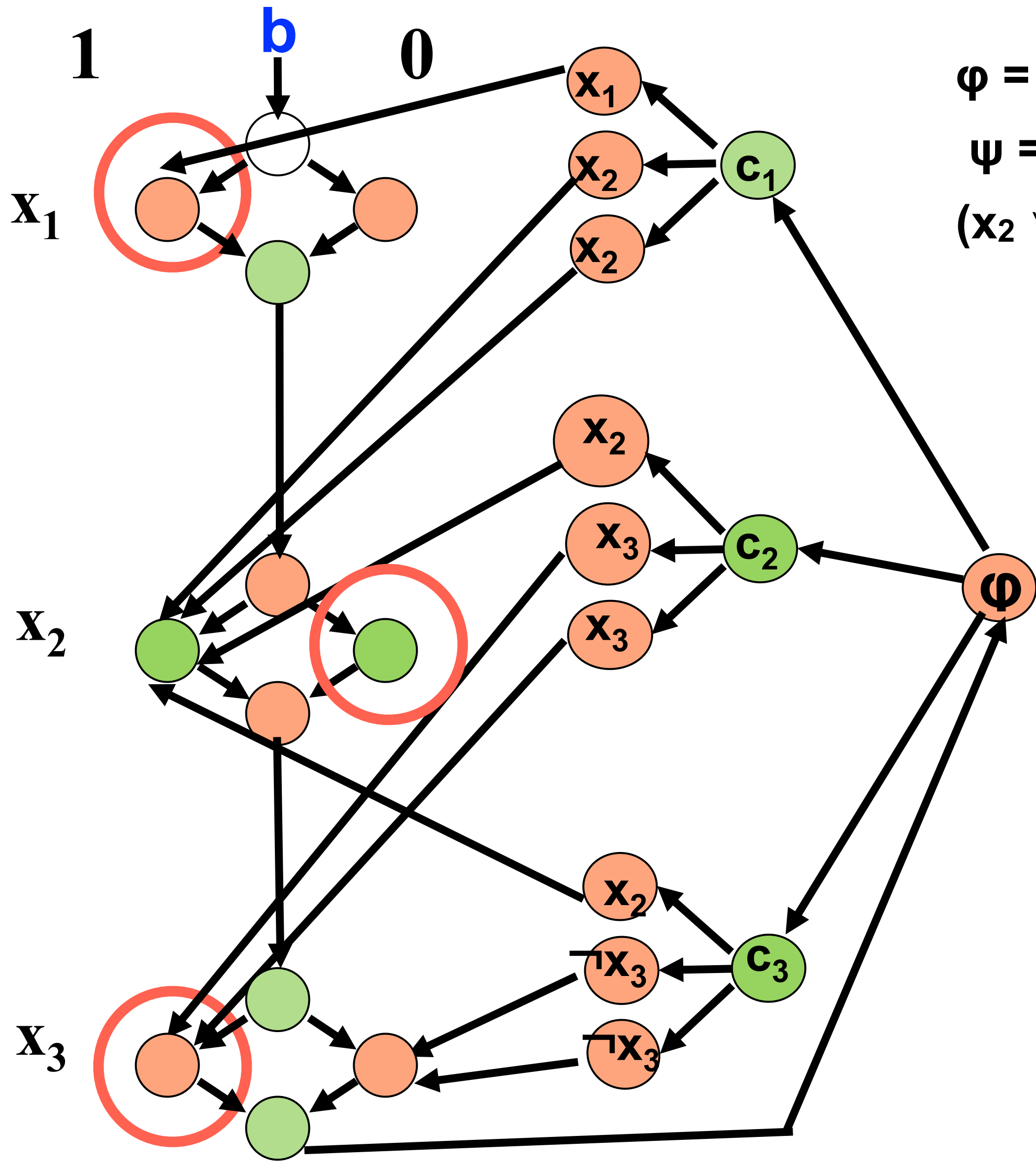
$\psi = [(x_1 \vee x_2 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_3)]$

Ex ha una strategia vincente per φ. I giocatori del GG associato scendono a sinistra nel rombo corrispondente a x se x è vera, scendono a destra altrimenti. La mossa per raggiungere φ è compiuta dal giocatore 1, mentre ogni c_i può essere scelto dal giocatore 2. Ma se il giocatore 1 sceglie il letterale vero nella strategia di Ex, allora il giocatore 2 non ha più scelta. Quindi il giocatore 1 ha una strategia vincente.

Nell'esempio Ex prende $x_1 = 1$, All $x_2 = 0$ e Ex rende vera la formula prendendo $x_3 = 1$

$\varphi \notin$ GIOCO-FORMULE $\Rightarrow$ <G,b> $\notin$ GG

G 1 G 2



$\varphi = \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \psi$ dove

$\psi = [(x_1 \vee x_2 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_3)]$

Sappiamo che All vince il gioco φ.

Nell'esempio Ex prende x_1 =1,All x_2 = 0 e Ex non può rendere vera la formula perchè con x_3 = 1 è falsa la terza clausola e con x_3 = 0 è falsa la seconda.

Nell'esempio x_3 = 1, qundi il giocatore 2 sceglie la clausola falsa, la terza e così qualunque sia la scelta di variabile del giocatore 1 il giocatore 2 ha una mossa vincente.