

AUTOMI A PILA

**Introdotti da A. G. Oettinger in
“Automatic Syntactic Analysis
and the pushdown store” Proc.
Symp. Applied Math., 1961 e da**

**M.P. Schutzenberger in “Context
free languages and pushdown
automata” Information and
Control, 1963**



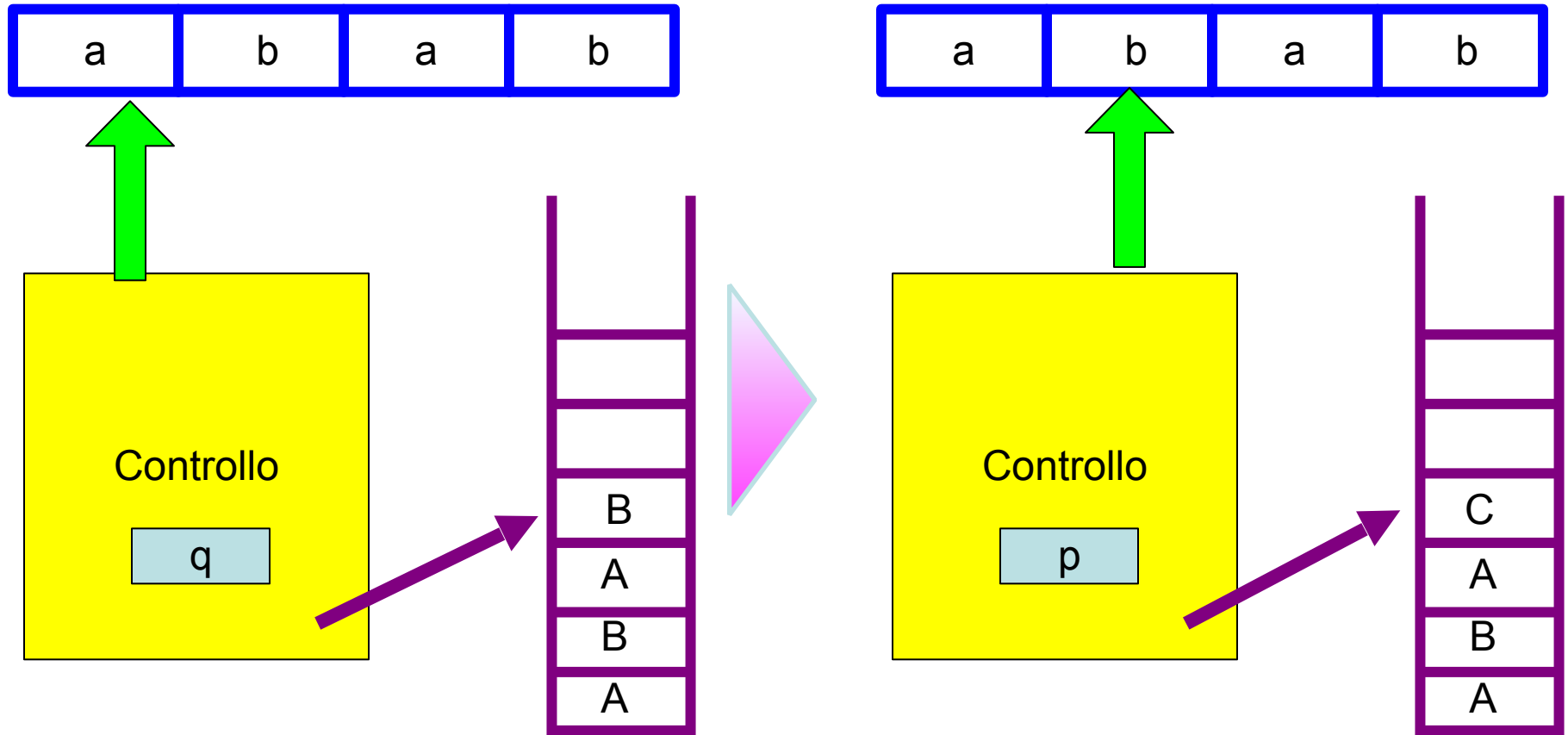
M.P. Schutzenberger

Schutzenberger (1920-1996)

**è stato un ricercatore e un punto di riferimento per varie generazioni di
ricercatori nel campo dei linguaggi formali e l'informatica teorica.**

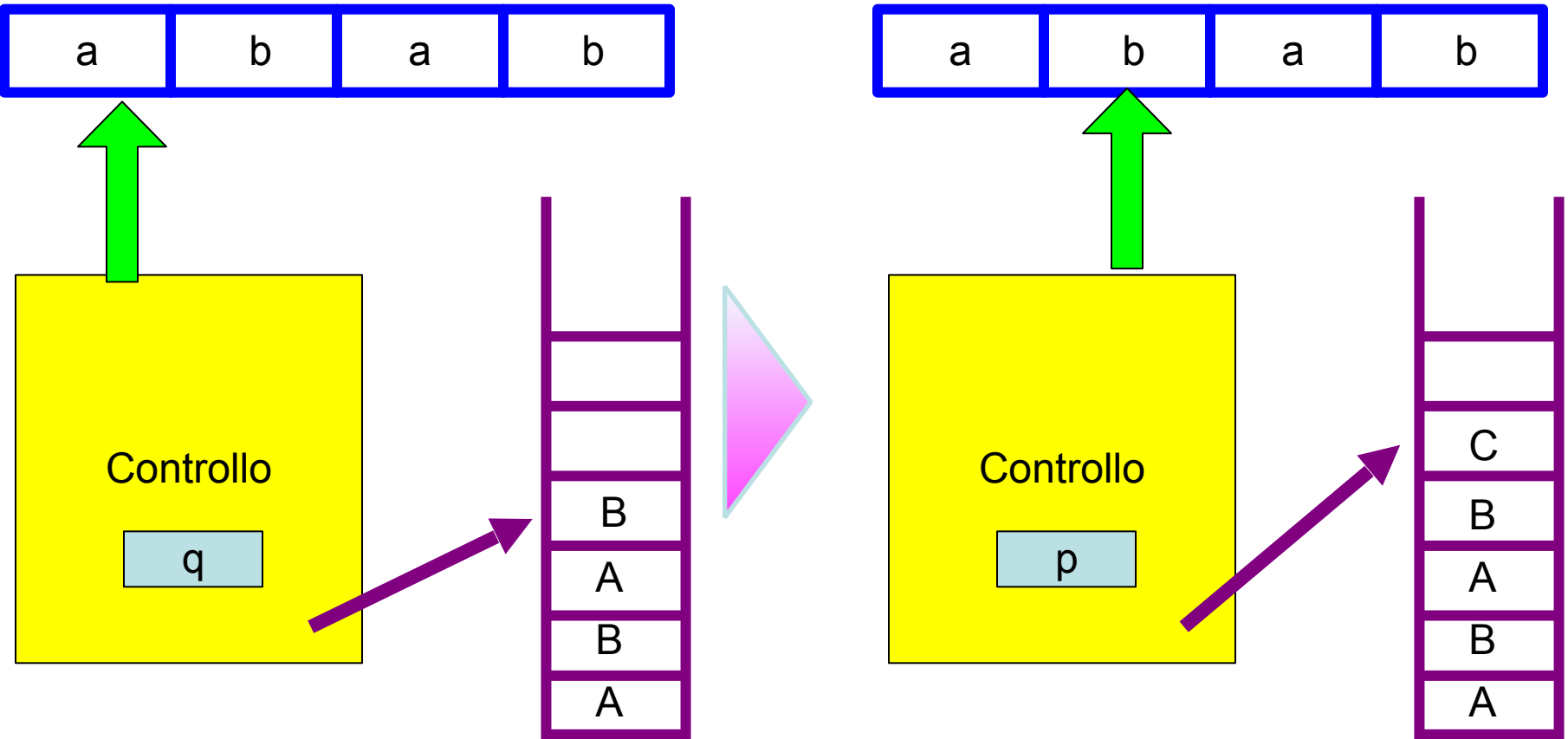
Ha insegnato alla Facoltà di Scienze dell'Università di Parigi (VI e VII).

AUTOMI A PILA: modello mentale



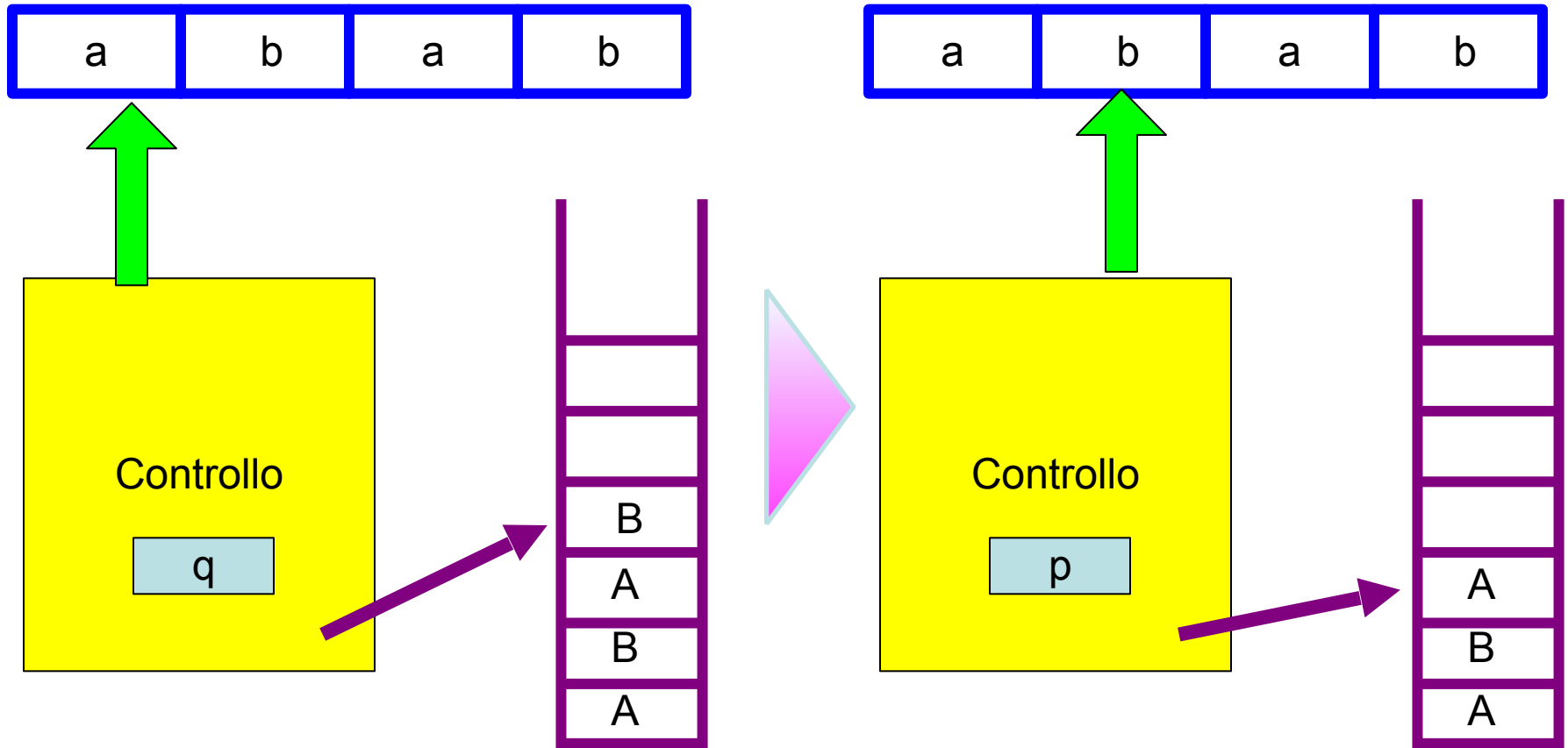
In generale ora una mossa dipende dallo stato, dal simbolo in lettura sul nastro di input e dal simbolo in lettura in cima alla pila e la sua esecuzione comporta cambio stato, spostamento testina di lettura e sostituzione simbolo in cima alla pila.

AUTOMI A PILA: Push



Se si ignora il simbolo in cima alla pila si esegue una Push: si inserisce in cima alla pila. Questa può anche essere una ϵ -mossa (sull'input)

AUTOMI A PILA: Pop

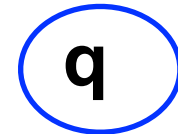


Se si cancella il simbolo in cima alla pila si ottiene la Pop, che può anche essere eseguita con una ϵ -mossa (sull'input)

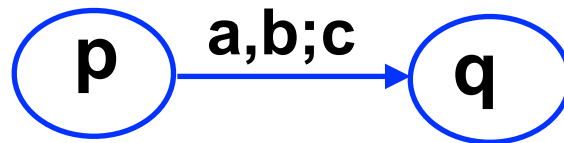
DIAGRAMMA DEGLI STATI

È un grafo diretto in cui

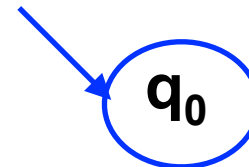
- ogni nodo corrisponde a uno stato



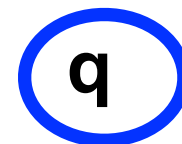
- tra una coppia di nodi corrispondenti agli stati p e q c'è un arco con etichetta $a,b;c$ se c'è la regola: nello stato p se leggi a e in cima alla pila c'è a vai nello stato q e impila c al posto di a



- lo stato iniziale q_0 è denotato

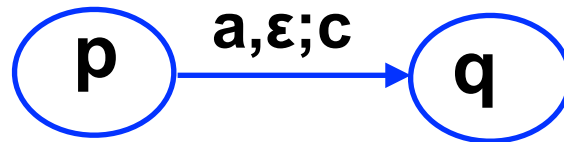


- uno stato finale q è denotato

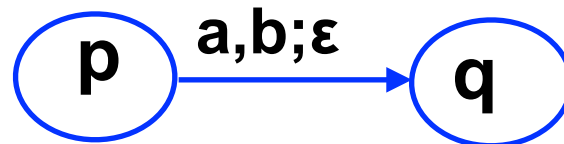


Push e Pop

Per realizzare un'operazione di push, semplicemente ignoriamo la cima della pila e quindi impiliamo il simbolo c :

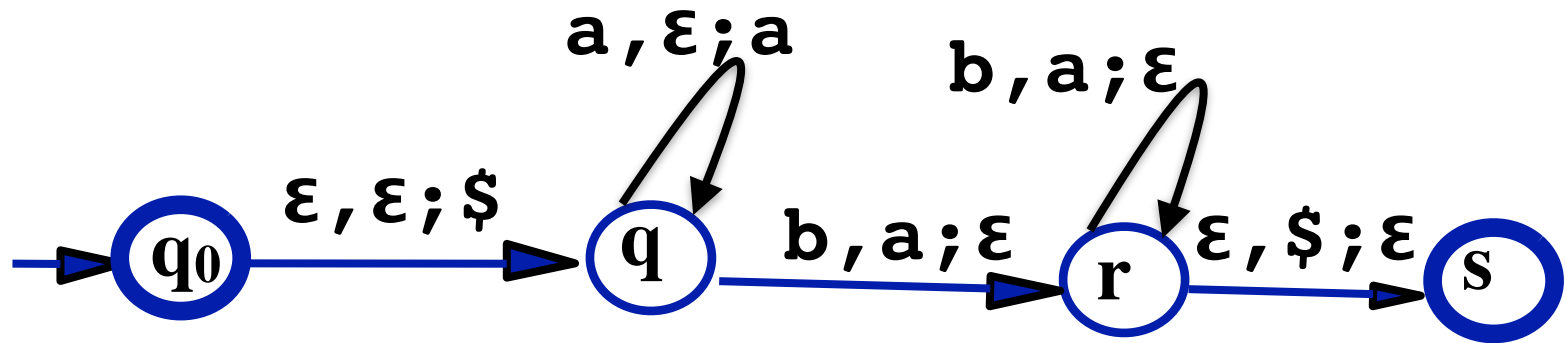


Per realizzare un'operazione di pop, semplicemente sostituiamo il simbolo in cima alla pila con la parola vuota



Esempio 1

Un PDA che accetta $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

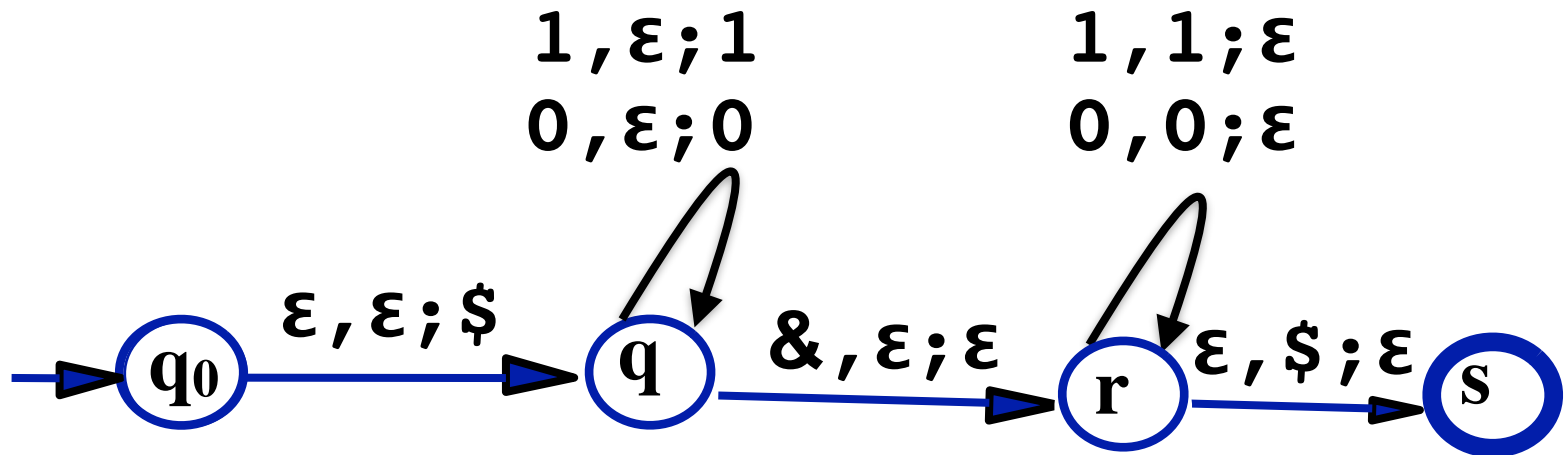


Come nel caso dei DFA una parola è accettata solo se si entra in uno stato di accettazione avendo terminato la lettura dell'input.

Per accettare la parola vuota, si può rendere finale lo stato iniziale.

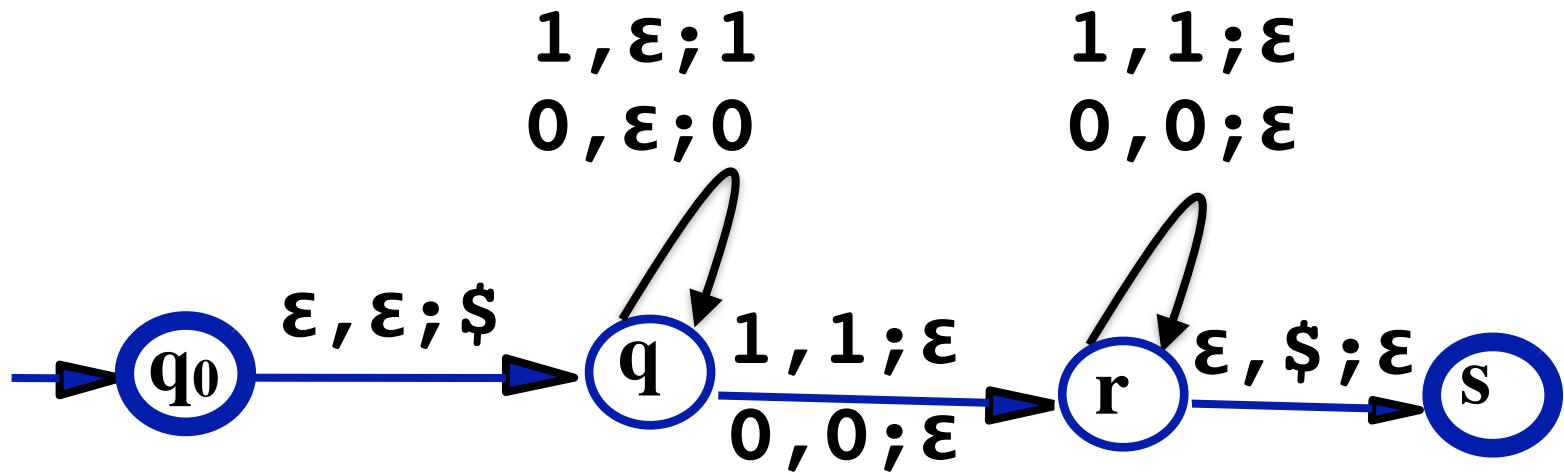
Esempio 2

Un PDA che accetta $L = \{x \& rev(x) \mid x \text{ è in } \{0,1\}^*\}$



Esempio 3

Un PDA che accetta $L = \{x^{rev}(x) \mid x \text{ è in } \{0,1\}^*\}$



MODELLO FORMALE

Un automa pushdown non deterministico, in breve **PDA** da **P**ush **D**own **A**utomaton, è una 6-pla

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ dove

1. Q, Σ, Γ sono insiemi finiti rispettivamente di **stati**, simboli di input e simboli di pila
2. $\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \cup \{\varepsilon\} \rightarrow P(Q \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}))$ è la funzione di transizione ,
3. $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale
4. $F \subseteq Q$ è l'insieme degli stati finali o di accettazione.

NOTA: $P(X)$ è l'insieme dei sottoinsiemi di X .

Passi di calcolo

Se $(q, B) \in \Delta(p, a, A)$, con $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $A, B \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$ allora l'automa nello stato p può eseguire uno dei seguenti passi di calcolo:

1. se $a \in \Sigma$, $A, B \in \Gamma$ con a in lettura sul nastro di input e A in cima alla pila passa nello stato q , rimpiazza A con B in cima alla pila e muove la testina di lettura del nastro di input di una cella verso destra.
2. (**PUSH**) se $a \in \Sigma$, $A = \varepsilon$, $B \in \Gamma$ con a in lettura sul nastro di input e indipendentemente dal simbolo in cima alla pila, passa nello stato q , impila B in cima alla pila e muove la testina di lettura del nastro di input di una cella verso destra.

Passi di calcolo

Se $(q, B) \in \Delta(p, a, A)$, con $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$, $A, B \in \Gamma \cup \{\epsilon\}$ allora l'automa nello stato p può eseguire uno dei seguenti passi di calcolo,

3. **(POP)** se $a \in \Sigma$, $A \in \Gamma$, $B = \epsilon$ con a in lettura sul nastro di input e A in cima alla pila, passa nello stato q , elimina A dalla cima della pila e muove la testina di lettura del nastro di input di una cella verso destra.

Se $a = \epsilon$, i tre tipi di mosse avvengono senza che la testina di lettura si sposti.

Configurazione

Come nel caso dei DFA, il concetto di **configurazione** è utile per descrivere la situazione in cui si trova la macchina complessivamente:

- lo stato,
- l'input ancora da esaminare e
- il contenuto della pila.

Quindi una configurazione è un elemento di

$$Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*.$$

La configurazione iniziale è (q_0, x, ε) , se q_0 è lo stato iniziale e x è la parola input, infatti inizialmente la pila è vuota.

Passi di calcolo

La **relazione di transizione** sulle configurazioni descrive una mossa dell'automata M , è denotata \vdash_M ed è così definita:

per $p, q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $x \in \Sigma^*$, $A, B \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$ e $\gamma \in \Gamma^*$

$(p, ax, AY) \vdash_M (q, x, BY)$ se $(q, B) \in \Delta(p, a, A)$.

Accettazione

Dato un PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$

il linguaggio accettato da M , $L(M)$, è

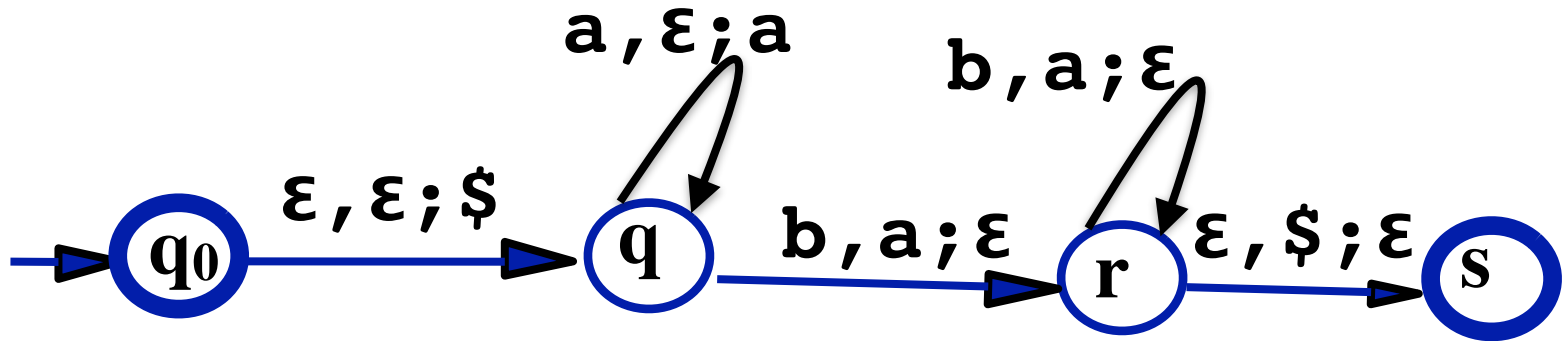
$L(M) = \{x \mid x \in \Sigma^* \text{ e } (q_0, x, \varepsilon) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \gamma), \text{ per } q \in F \text{ e } \gamma \in \Gamma^*\}$,

cioè l'insieme delle parole in input per l'automa che determinano una sequenza di configurazioni in cui la prima è quella iniziale e l'ultima, completata la lettura dell'input, è in uno stato finale.

In un modello formale alternativo ma che si dimostra equivalente si considerano accettate le parole allo svuotamento della pila, indipendentemente dallo stato di arrivo.

Esempio 1

Un PDA che accetta $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

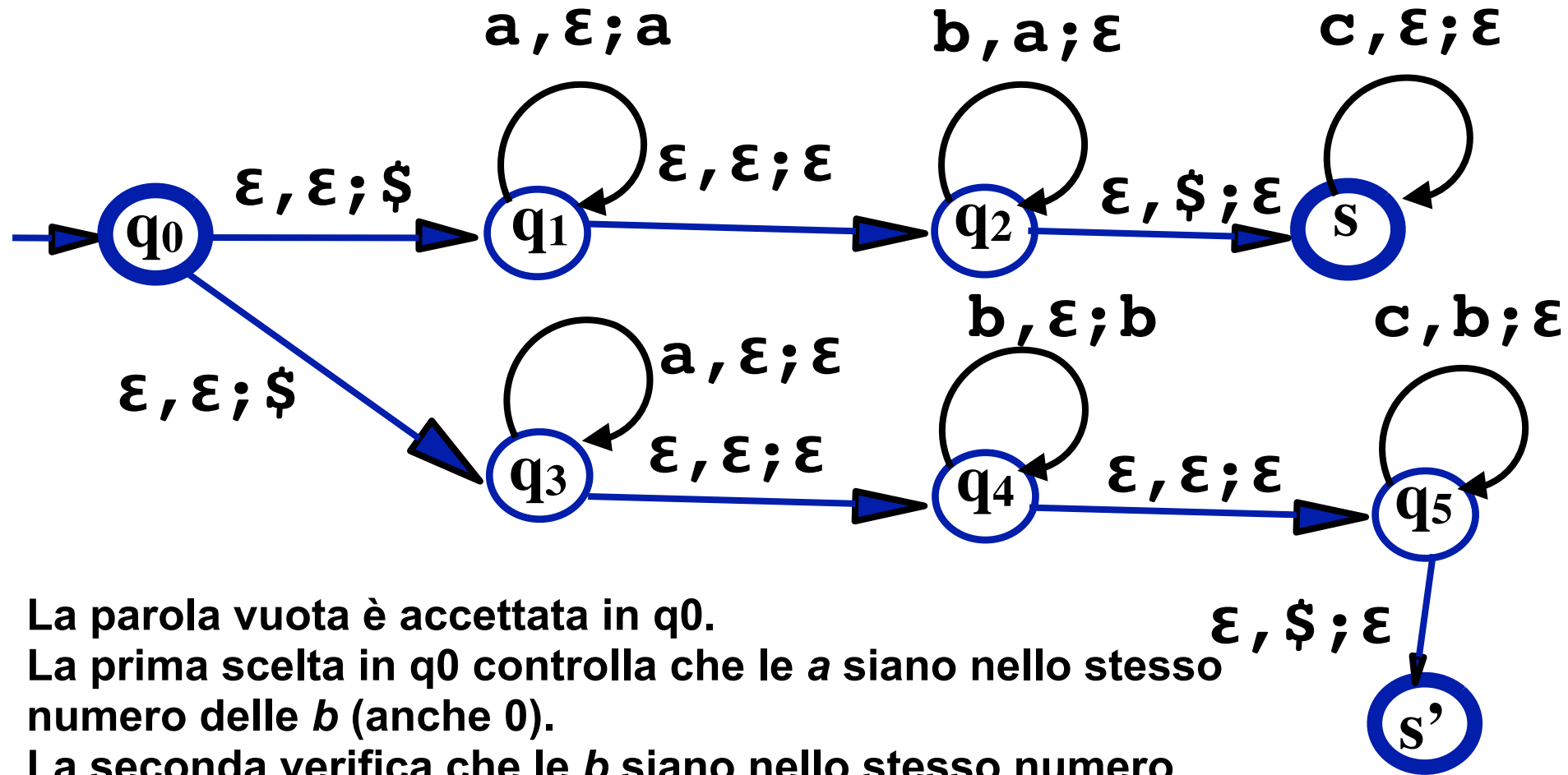


Come nel caso dei DFA una parola è accettata solo se si entra in uno stato di accettazione avendo terminato la lettura dell'input.

Per accettare la parola vuota, si può rendere finale lo stato iniziale.

Esercizi

Esiste un PDA per $L = \{a^i b^j c^k \mid i=j \text{ o } j=k, \text{ con } i, j, k \geq 0\}$?



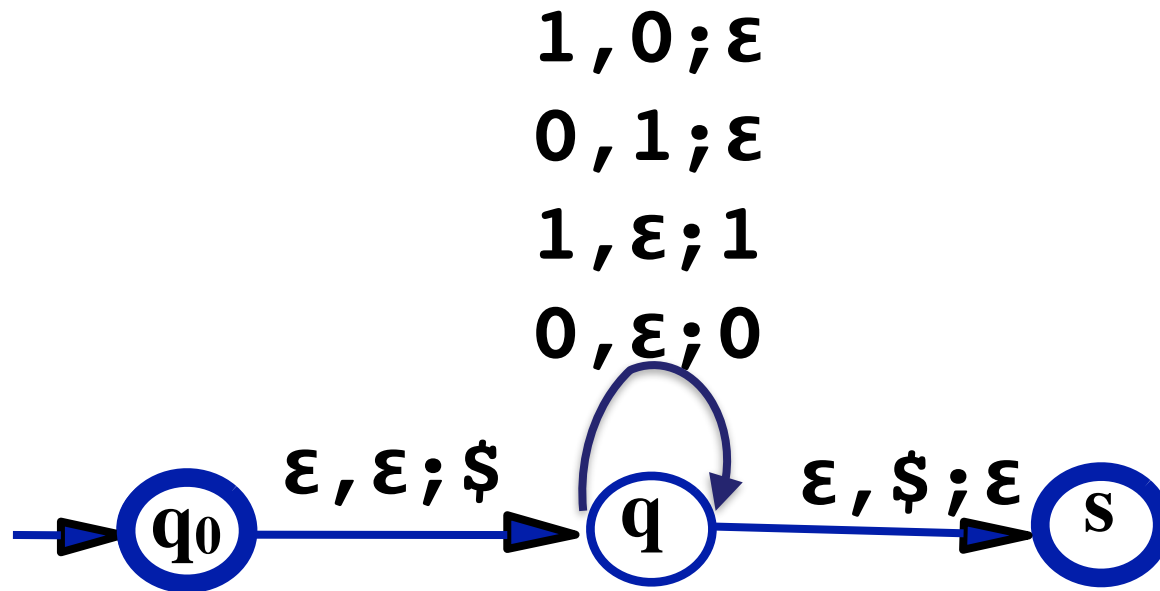
La parola vuota è accettata in q_0 .

La prima scelta in q_0 controlla che le a siano nello stesso numero delle b (anche 0).

La seconda verifica che le b siano nello stesso numero delle c ,

Esempi di linguaggi accettati da un PDA

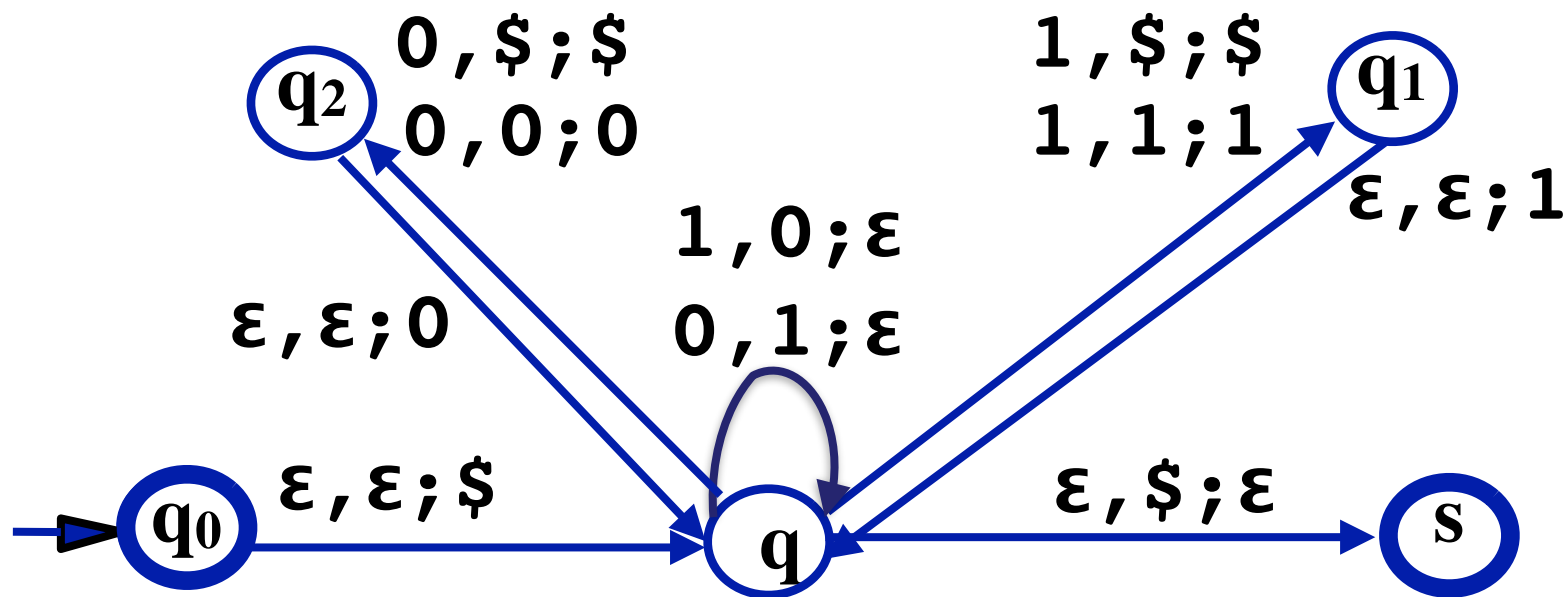
$$\{ x \in \{0,1\}^* \mid n_0(x) = n_1(x) \}$$



E' non deterministico

Esempi di linguaggi accettati da un PDA

$$\{x \in \{0,1\}^* \mid n_0(x) = n_1(x)\}$$



E' deterministico

Automati Push Down Deterministici

Un PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ è deterministico se

- per ogni $q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ e $B \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$
 $|\Delta(q, a, B)| \leq 1$
- per ogni $q \in Q$ e, $a \in \Sigma$
 $\Delta(q, \varepsilon, B) \neq \emptyset \Rightarrow \Delta(q, a, B) = \emptyset$ per $B \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$
 $\Delta(q, a, \varepsilon) \neq \emptyset \Rightarrow \Delta(q, a, B) = \emptyset$ per $B \in \Gamma$

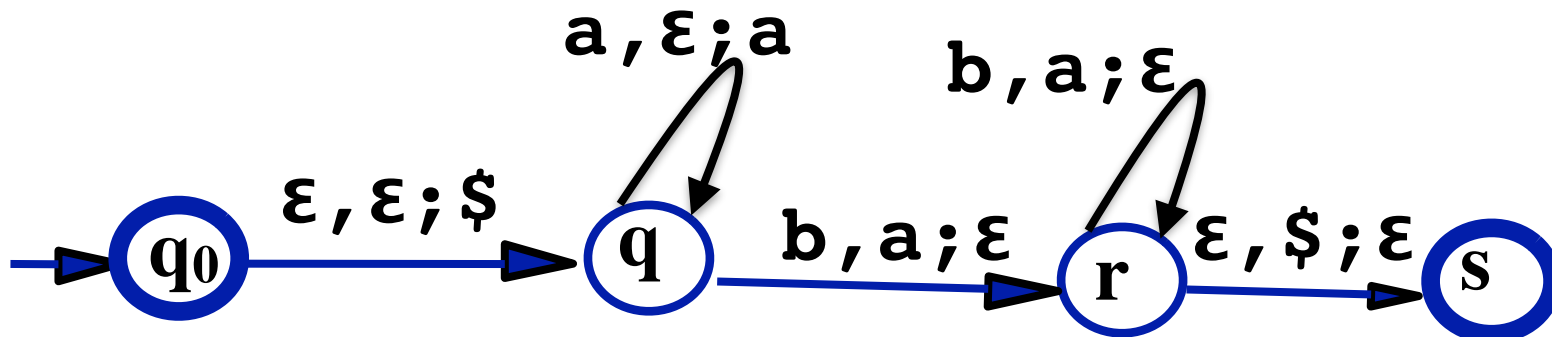
Così se c'è una ε -mossa eseguibile in un certo stato e con un certo simbolo in cima alla pila allora quella è l'**unica** mossa eseguibile in quello stato e con quel simbolo in cima alla pila.

Così se c'è una mossa che non dipende dal simbolo in lettura in cima alla pila, quella deve essere l'unica mossa possibile.

Esempi

IL PDA A mostrato tale che

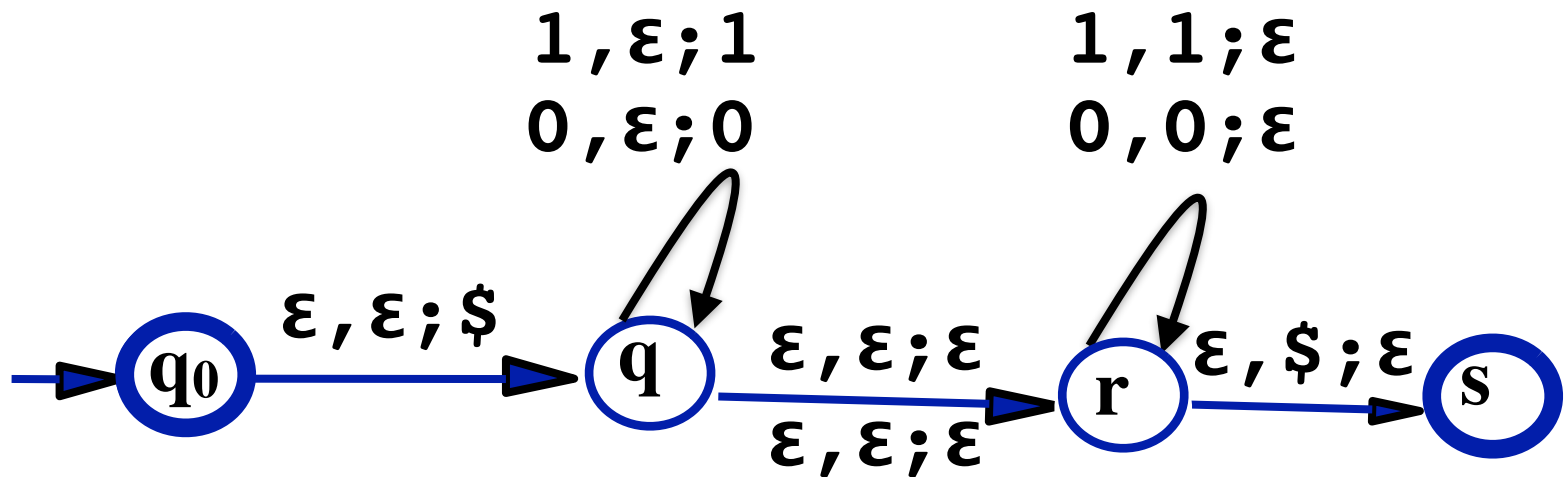
$L(A) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ è deterministico



Esempi

il PDA A mostrato tale che $L(A) =$

$\text{Pal} = \{ x\text{rev}(x) \in \{0,1\}^* \}$ è **non** deterministico.

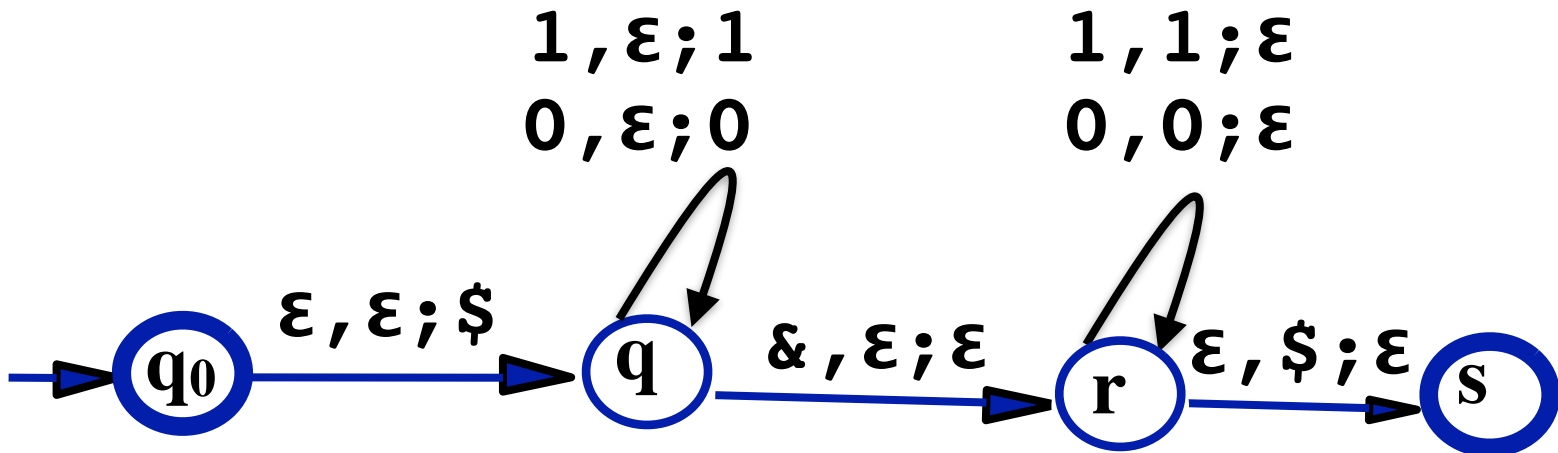


Si può dimostrare che **non** esiste un DPDA per Pal .

Esempi

il PDA A tale che $L(A)$

$= \{ x \& \text{rev}(x) \in \{0,1\}^* \}$ è deterministico.



Determinismo e non determinismo

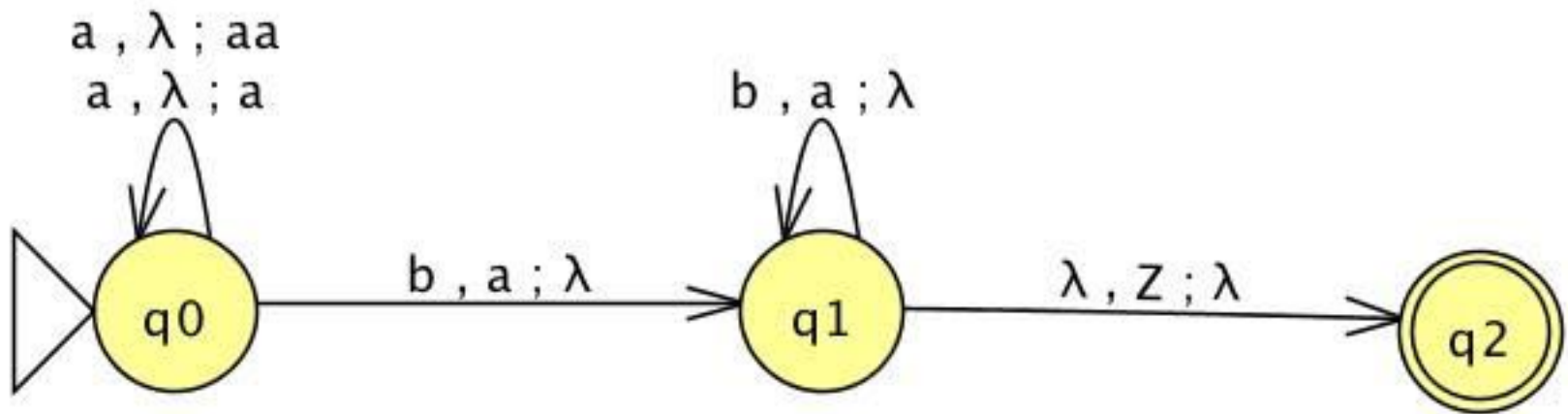
A differenza del caso dei DFA, esistono linguaggi accettati da un PDA che non possono essere accettati da un DPDA.

Quindi $\mathcal{L}(\text{PDA})$, la classe dei linguaggi accettati dai PDA, **contiene strettamente** $\mathcal{L}(\text{DPDA})$, la classe dei linguaggi accettati dai PDA deterministici, in breve

$$\mathcal{L}(\text{DPDA}) \subset \mathcal{L}(\text{PDA}).$$

Esercizi

Esiste un PDA per $L = \{a^n b^m \mid 0 < n \leq m \leq 2n\}$?



La soluzione prevede che il simbolo Z di fine pila sia presente nella pila all'inizio del calcolo.