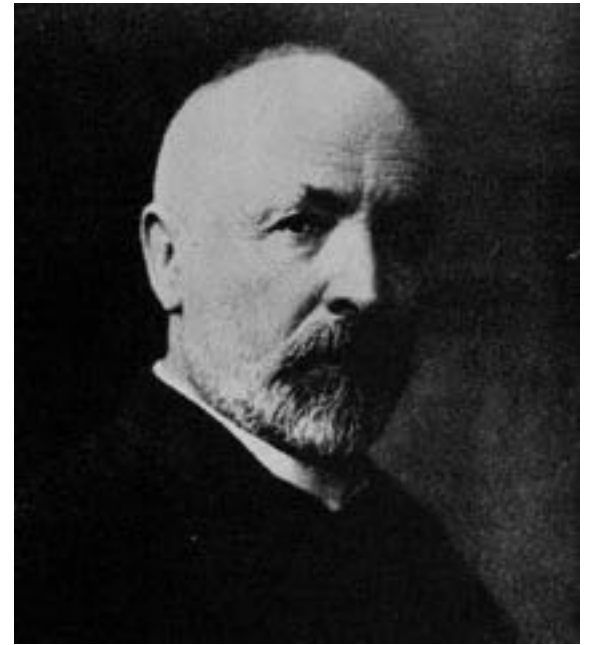


Sommario

- **Esistenza problemi indecidibili.**
- **Il metodo della diagonalizzazione di Cantor**
- **L'autoreferenzialità**

La diagonalizzazione.

Ricorderete che Georg Cantor ha inventato il metodo della diagonalizzazione per dimostrare che i numeri reali hanno una cardinalità diversa da quella dei naturali.



Georg Cantor (1845 -1918)

Numerabilità

Un insieme infinito è numerabile se può essere messo in corrispondenza biunivoca con quello dei numeri naturali.

Esempio: Sia P l'insieme dei numeri pari, la funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow P$, tale che $f(n) = 2n$ è una corrispondenza biunivoca.

x	f(x)
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
	...

$f : X \rightarrow Y$ è una biezionone o è biunivoca se

- **$\forall x, u \text{ in } X \ x \neq u \Rightarrow f(x) \neq f(u)$ (iniettività)**
- **$\forall y \text{ in } Y \ \exists x \text{ in } X$ tale che $f(x) = y$ (suriettività)**

Numerabilità - 2

Esempio: Sia \mathbb{N}^+ l'insieme dei numeri positivi, la funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^+$, tale che $f(n) = n+1$ è una corrispondenza biunivoca.

Un insieme X si dice enumerabile quando esiste una corrispondenza biunivoca calcolabile tra X e l'insieme dei numeri naturali. Una funzione è calcolabile se esiste un algoritmo che la calcola.

Per dimostrare che un insieme è numerabile basta dimostrare l'esistenza di una corrispondenza biunivoca con i naturali anche senza fornirla!

x	f(x)
0	1
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	7
	...

Numerabilità delle parole

Definiamo l'ordine **canonico** o **quasi-lessicografico** sulle parole:

Ordiniamo le **lettere** dell'alfabeto, poi **estendiamo** l'ordine alle parole come segue:

$x < y$ se $\left\{ \begin{array}{l} |x| < |y| \text{ oppure} \\ |x| = |y| \text{ e } x \text{ precede } y \text{ nell'ordine} \\ \text{lessicografico determinato} \\ \text{dall'ordinamento sulle } \mathbf{lettere}. \end{array} \right.$

L'ordinamento è totale e produce una corrispondenza biunivoca con \mathbb{N} .

Potremmo anche parlare di enumerabilità, visto che la corrispondenza è calcolabile.

Non numerabilità dei linguaggi

Un linguaggio può essere messo in corrispondenza biunivoca con una **sequenza binaria di lunghezza infinita**.

Esempio1: $\Sigma = \{a,b\}$, $L = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$

$\Sigma^* = \varepsilon \ a \ b \ aa \ ab \ ba \ bb \ aaa \ aab \ aba \ abb \ baa \ \dots \ bbb \ aabb \ \dots$

$f(L) = 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ \dots$

Esempio2: $\Sigma = \{a,b\}$, $L = \{ ab^n \mid n \geq 0 \}$

$\Sigma^* = \varepsilon \ a \ b \ aa \ ab \ ba \ bb \ aaa \ aab \ aba \ abb \ baa \ \dots \ bbb \ \dots \ abbb \ \dots$

$f(L) = 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots$

Non numerabilità delle sequenze binarie di lunghezza infinita

Per assurdo, supponiamo che sia numerabile e applichiamo il metodo della diagonalizzazione

x	f(x)
1	<u>0</u> 00111101 ..
2	1 <u>1</u> 1100101 ...
3	10 <u>0</u> 001101 ...
4	010001111 ...
5	000 <u>1</u> 10101 ...
6	101000 <u>0</u> 01 ...
	...

Ma $y = 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ \dots$

non può essere in elenco, perchè per ogni i , l' i -sima sequenza binaria di lunghezza infinita differisce da y nella i -sima posizione.

Esistenza di problemi per i quali non esistono algoritmi

1. Un algoritmo è una stringa di lunghezza finita. Quindi disponiamo di un'infinità numerabile di algoritmi.
2. Ogni problema di decisione può essere visto come un linguaggio, quello delle stringhe che descrivono istanze con soluzione SI. Quindi l'insieme dei problemi ha la cardinalità del continuo.

Conclusione: necessariamente esistono dei problemi per i quali non c'è un algoritmo

Esistenza di problemi per i quali non esistono algoritmi

Ma vorremmo poter esibire un **particolare problema** per il quale non esiste un algoritmo.

Per arrivare a questo Turing sfruttò il metodo di Cantor e l'autoreferenzialità.

Teoria ingenua degli insiemi

- Un insieme è una collezione di elementi.

Più precisamente, da <http://mathworld.wolfram.com/Set.html>).
Un insieme è una collezione finita o infinita di oggetti, che condividono una proprietà in cui ordine e molteplicità sono ignorati. (assioma di comprensione)

Esempi: gli interi, $\{x \mid x \text{ è un intero primo}\}$, $\{2,5,9\}$, $\{aa,ba,bb\}, \dots$

La teoria degli insieme nasce con la pubblicazione dell' articolo di Georg Cantor in 1874:
"On a Characteristic Property of All Real Algebraic Numbers".

Autoreferenzialità e antinomia di Russel (1901-1902)

Consideriamo i seguenti insiemi:

A = l'insieme di tutti gli insiemi finiti

B = l'insieme di tutti gli insiemi infiniti

C = l'insieme di tutti gli insiemi che non sono elementi di se stessi

Domande

A ∈ A ?	no
B ∈ B ?	sì
A ∈ C ?	sì
B ∈ C ?	no
C ∈ C ?	?

Esercizio sulla numerabilità

Si dimostri che l'insieme dei linguaggi regolari è numerabile e che quello dei linguaggi non regolari non è numerabile.

Si definisca una funzione di enumerazione per l'insieme delle stringhe binarie, cioè una funzione calcolabile che le numera, nell'ordine canonico.

Esercizio 2 sulla numerabilità

Sia B l'insieme delle sequenze binarie di lunghezza infinita.

Sappiamo che B non è numerabile.

Sia $C = \{x \mid x \text{ in } B \text{ e } n_1(x) \leq 25\}$, dove $n_1(x)$ è il numero di occorrenze di 1 in x .

Si dimostri che C è numerabile.