Sommario

Esempi di problemi NP-completi:

3-COLORING

HamCycle

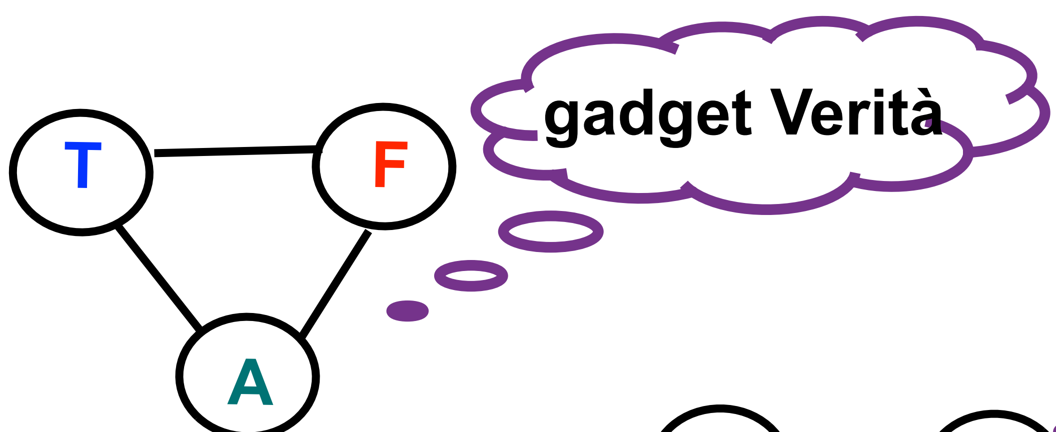
TSP

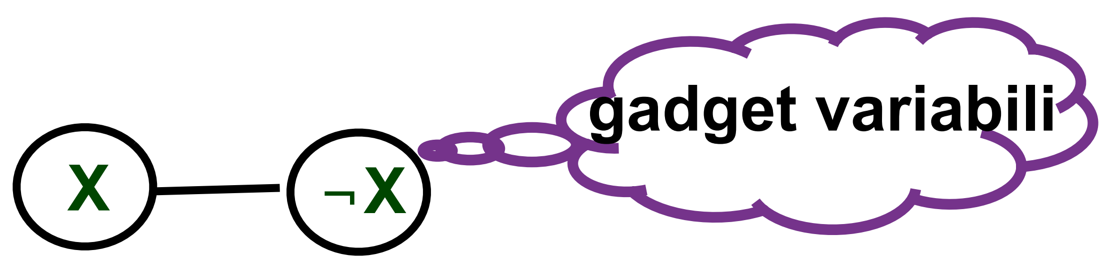
3-Coloring è NP-hard

Una colorazione di un grafo $G=(V,E)$ è una funzione $f : V \rightarrow \{1,\ldots,n\}$ tale che $\{u,v\} \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$. Una 3-colorazione usa solo tre colori.

3-col = {<G> | G è un grafo non diretto che ha una 3-colorazione} è NP-hard

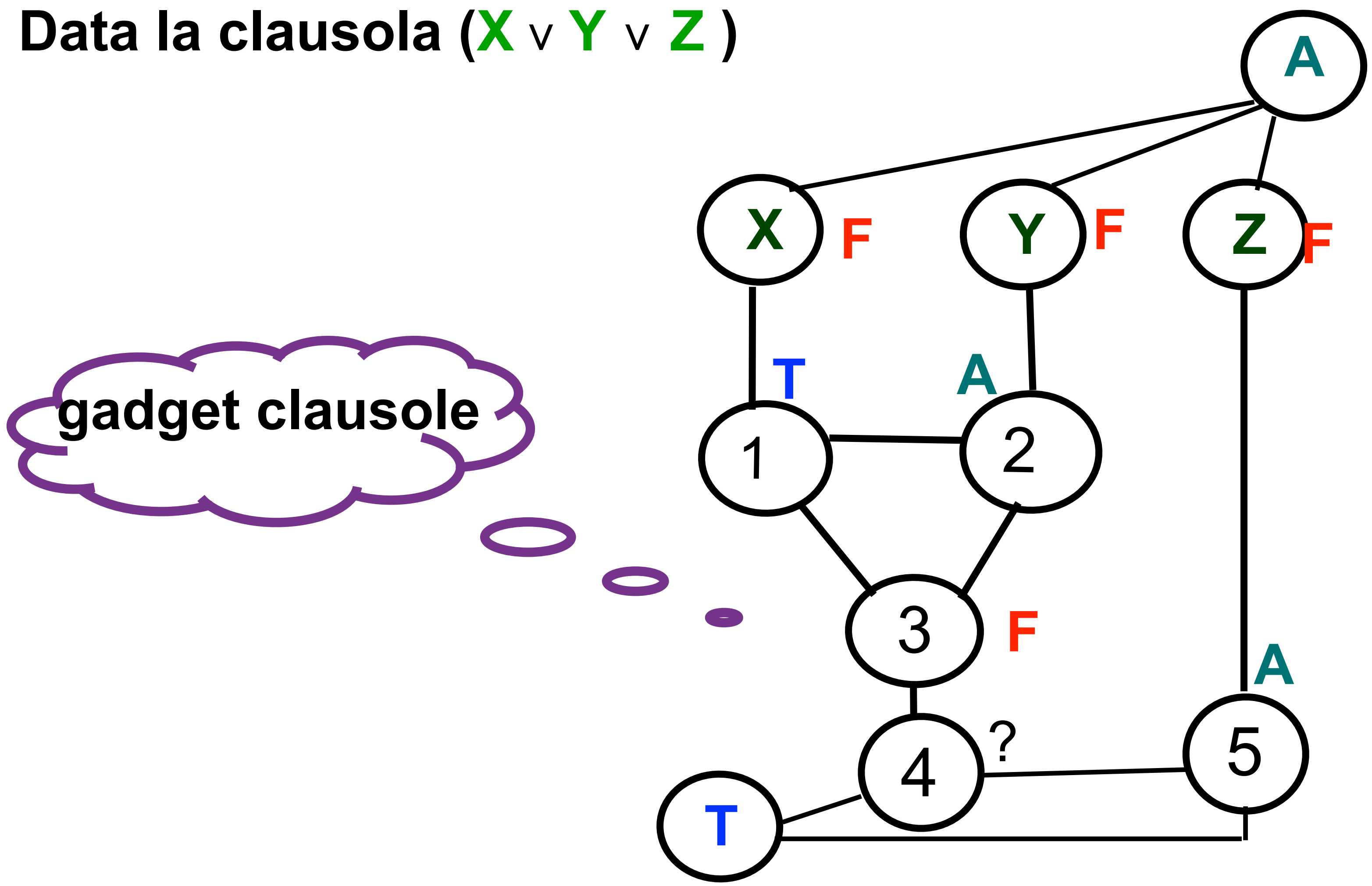
Per riduzione da 3-SAT





3-Coloring è NP-hard

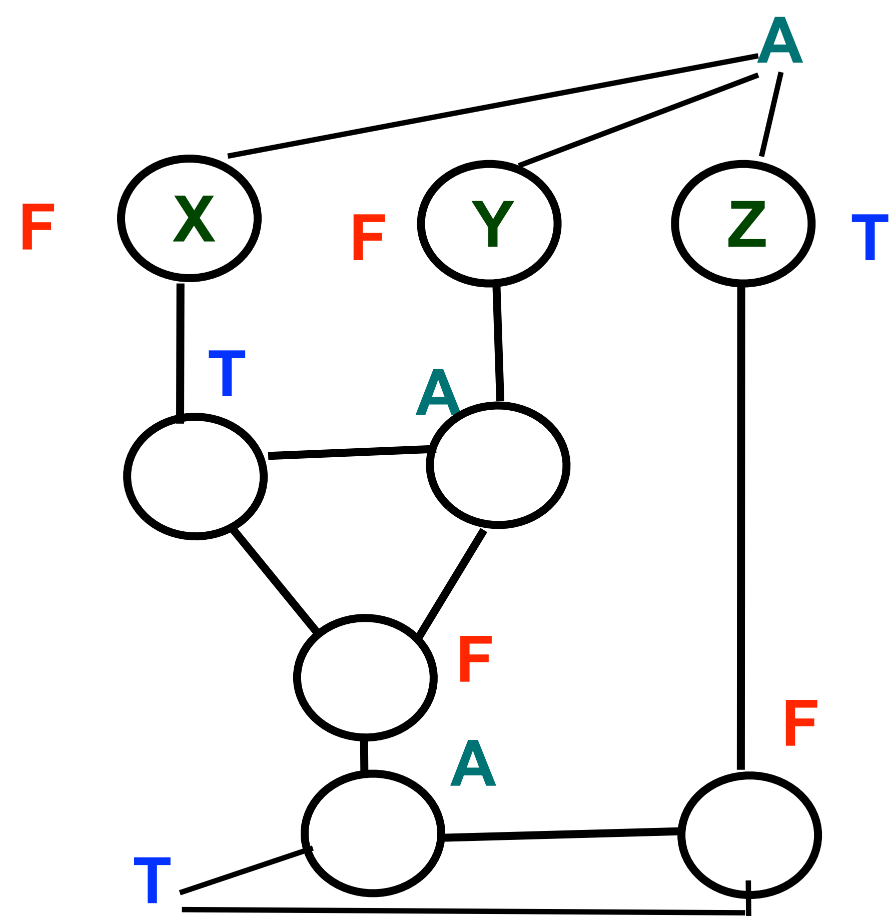
Data la clausola (X ∨ Y ∨ Z)



Il nodo 5 è connesso con un nodo colorato T e uno colorato F quindi non può che assumere il colore A. Ma il nodo 4 anche risulta connesso con un nodo colorato F, necessariamente, e un nodo colorato T, quindi anche 4 dovrebbe assumere il colore A.

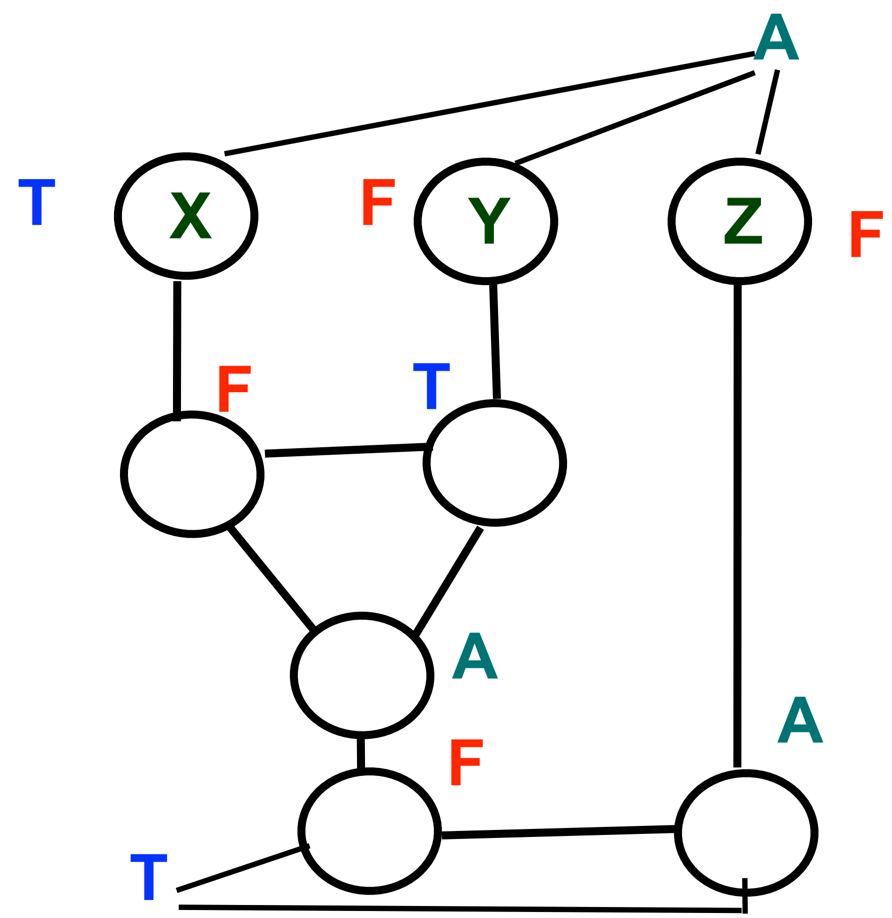
3-Coloring è NP-hard

Abbiamo visto che il gadget clausola non è colorabile se la clausola è falsa.
Basta attribuire valore vero a una variabile per ottenere la colorabilità



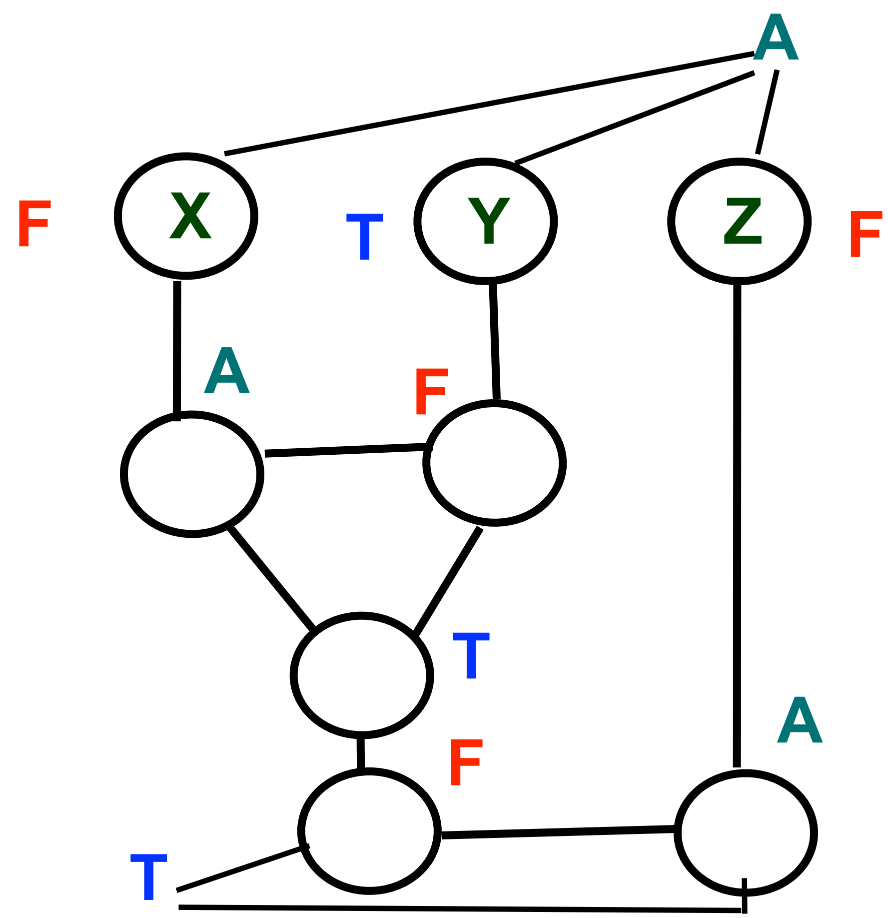
φ = **(X $\vee$ Y $\vee$ Z)**

3-Coloring è NP-hard



$\varphi = (X \vee Y \vee Z)$

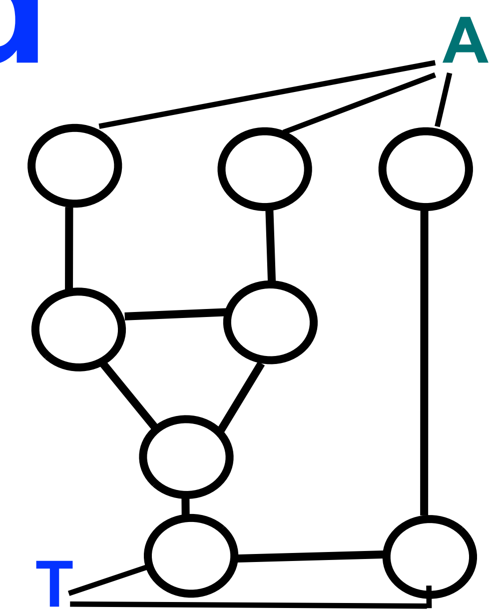
3-Coloring è NP-hard

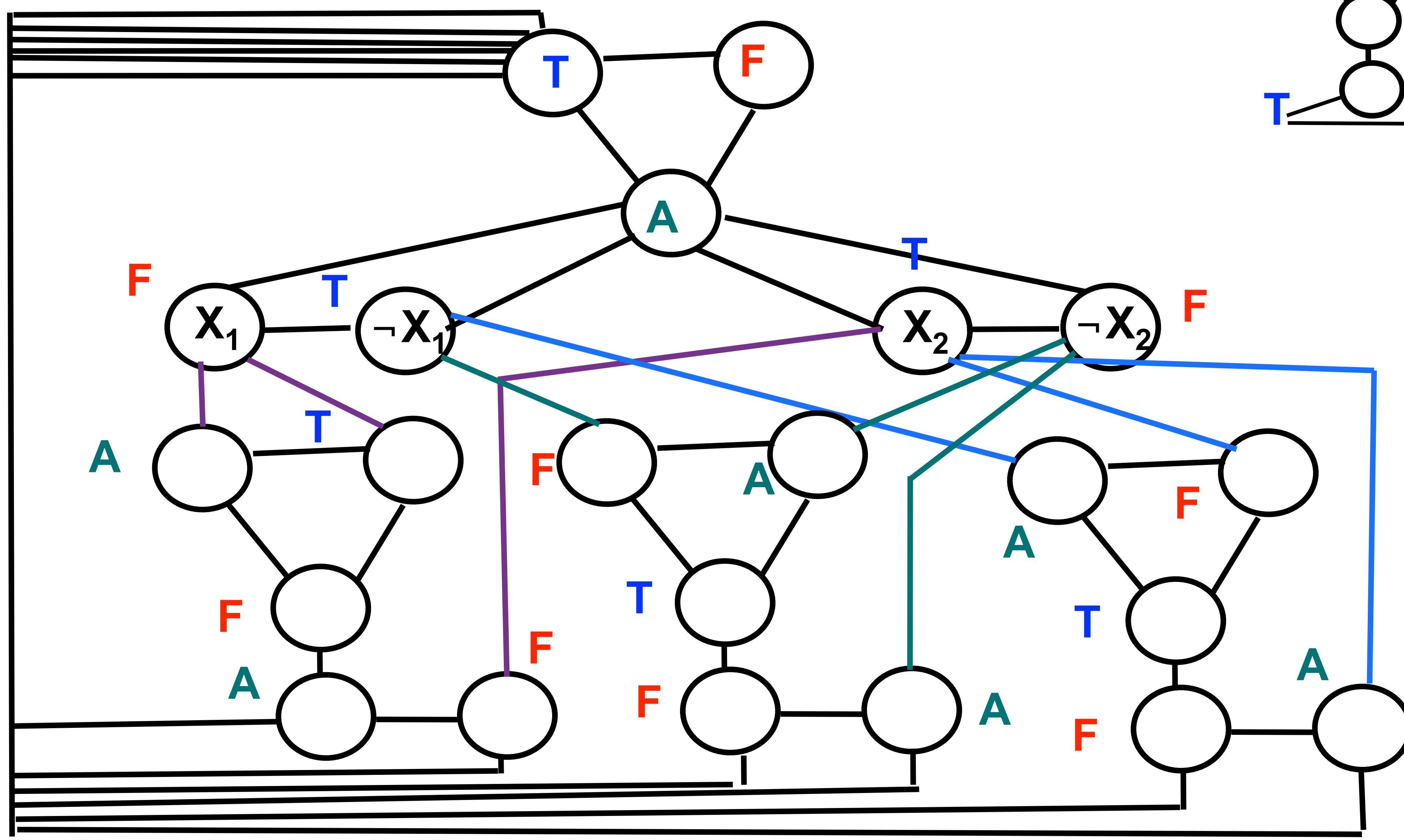


$\varphi = (X \vee Y \vee Z)$

3-Coloring è NP-hard

$$\varphi = (X_1 \vee X_1 \vee X_2) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_2) \wedge (\neg X_1 \vee X_2 \vee X_2)$$

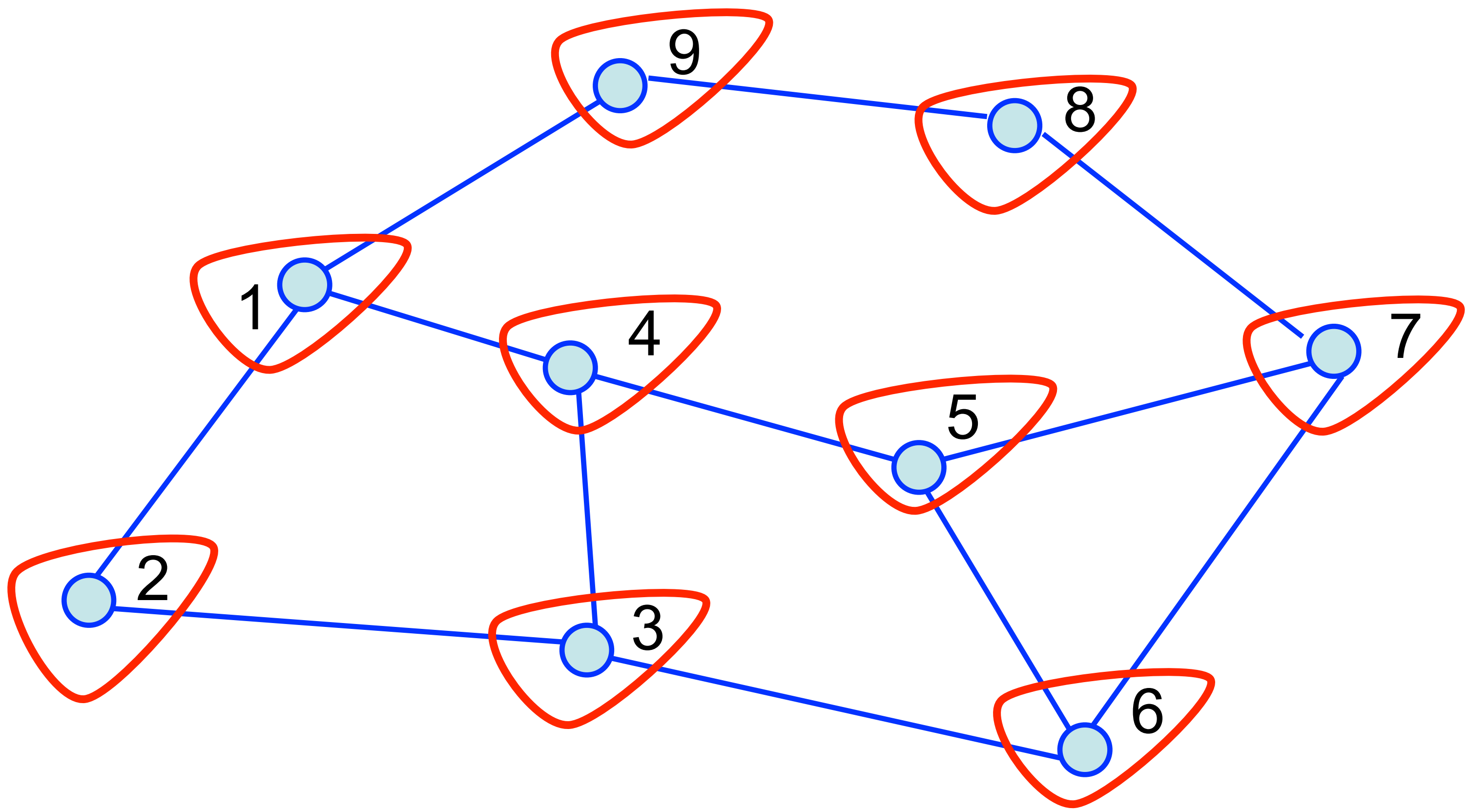




HamCycle

HamCycle è il problema dell'esistenza di un ciclo semplice che contiene tutti i vertici, cioè un ciclo hamiltoniano, in un grafo non diretto.

HamCycle = {<G> | G è un grafo non diretto con un ciclo hamiltoniano}

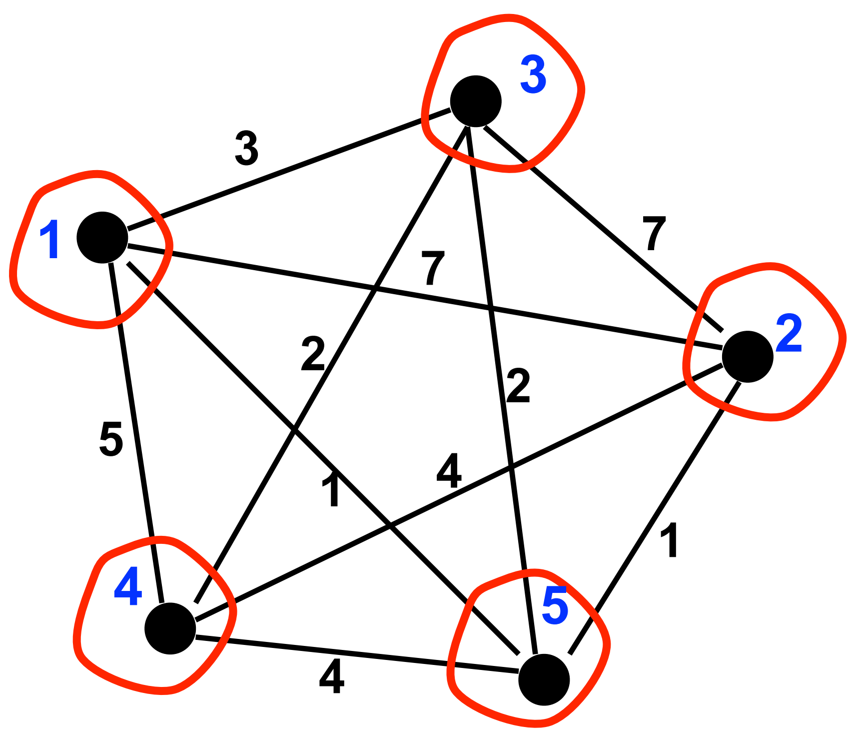


TSP

TSP è il problema decisionale associato al Traveling Salesman Problem (il problema del commesso viaggiatore):

dato un grafo G=(V,E) non diretto completo con una funzione costo a valori interi non negativi p : E → N e un intero non negativo B, si vuole sapere se esiste un ciclo hamiltoniano t su G di costo minore o uguale a B.

TSP = {<G=(V,E),p,B> | G è un grafo non diretto completo, p una funzione peso p : E → N, B in N e G ha un ciclo hamiltoniano di peso ≤ B}



B = 25

p(c)= 21

Hamcycle e TSP sono NP-completi

HamCycle = {<G> | G è un grafo non diretto con un ciclo hamiltoniano}

TSP = {<G=(V,E),p,B> | G è un grafo non diretto completo, p una funzione peso p : E $\rightarrow$ N, B in N e G ha un ciclo hamiltoniano di peso $\leq$ B}

Diamo per noto che Hamcycle sia NP-hard (vedi Sipser), sappiamo che è in NP, facciamo vedere che TSP è NP-completo.

Non è difficile dimostrare che TSP è in NP.

Dimostraiamo che HamCycle $\leq_p$ TSP

HamCycle $\leq_p$ TSP

A un grafo non diretto G=(V,E) associamo un'istanza del TSP (G',p,B) in modo tale che G=(V,E) $\in$ HamCycle $\Leftrightarrow$ <G'=(V,E'),p,B> $\in$ TSP

G'=(V,E') dove E'={{x,y} | x≠y $\in$ V},
p({x,y}) = 0 se {x,y} $\in$ E e p({x,y}) = 1 altrimenti e
B = 0

Osservazione I

Se un problema A si riduce (polinomialmente) a un problema B allora possiamo dire che

la complessità di A ≤ la complessità della riduzione + la complessità di B.

Infatti un algoritmo per A è ottenuto componendo in sequenza quello che calcola la riduzione e un algoritmo per B.
In questo senso i problemi NP completi sono i più difficili in NP.

Osservazione 2

Sappiamo che in una teoria logica del primo ordine abbastanza ricca espressivamente (per esempio l'aritmetica) il problema di stabilire se una data formula è un teorema della teoria è indecidibile.

Questo è il famoso "problema di decisione di Hilbert" cui Turing e Church danno la risposta negativa.

Ma il problema di decidere se una formula ha una prova di al più n simboli in una teoria logica del primo ordine, abbastanza ricca espressivamente, è in NP.

Quindi se P=NP avrei un procedimento efficiente per stabilire se una formula è un teorema, limitando la lunghezza della prova, per esempio a 10^{12}.

Da $P \overset{?}{=} NP$ di Scott Aaronson