Sommario

Due nuove operazioni sui linguaggi:

- concatenazione o prodotto di linguaggi
- stella di Kleene

Dimostrazione della chiusura della classe dei linguaggi accettati da un NFA (e quindi da un DFA) rispetto a concatenazione e stella di Kleene

Concatenazione

Concatenazione di due parole:

date x = a1a2...an e y = b1b2...bm in Σ^*, n,m $\geq$0

xy = a1a2...anb1b2...bm è la loro concatenazione

Definizione ricorsiva di concatenazione:

per x,y in Σ^* e *a* in Σ

$x\varepsilon = x$

$x(ya) = (xy)a$

La parola vuota concatenata a sinistra o a destra lascia invariata la parola, cioè è l'elemento neutro della concatenazione come 1 lo è per la moltiplicazione tra numeri

Concatenazione o prodotto di linguaggi

Estensione della concatenazione ai linguaggi:

$L, L' \subseteq \Sigma^*$

$LL' = \{w \text{ in } \Sigma^* \mid \exists\, x \text{ in } L,\ y \text{ in } L' \text{ e } w=xy\}$

Esempi:

1. Se L = {a, ab,ba}, L' = {ab,b}, allora LL' = {aab,ab,abab,abb,baab,bab}.

2. Se L = {b,ba}, L' = {ab,b}, allora LL' = {bab,bb,baab}.

bab è già presente

Proprietà:

$\{\varepsilon\}L = L = L\{\varepsilon\}$

$\varnothing L = \varnothing = L\varnothing$

Elevazione a potenza di parole

Potenza di una parola
per x in Σ^* $x^n = xx\ldots x$ (n volte)

Definizione ricorsiva di potenza:
$x^0 = \varepsilon$
$x^{n+1} = x^n x$ per $n \geq 0$

Potenza di linguaggi

<u>Estensione</u> della potenza ai linguaggi:

per $L \subseteq \Sigma^*$ $L^n = LL...L$ (n > 0 volte)

$L^0 = \{\varepsilon\}$

Esempi:

1. se $L = \{a,ab,ba\}$ allora
   $L^2 = \{aa,aab,aba,abab,abba,baa,baab,baba\}$.

aba

2. Se $L = \{ab,b\}$ allora
   $L^3 = \{ababab,abbab,babab,bbab,ababb,abbb,babb,bbb\}$.

Stella di Kleene

$$L \subseteq \Sigma^*, \quad L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$$

Quindi $L^* = \{\varepsilon\} \cup L \cup LL \ldots$

Esempi:

1. $\{a,b\}^* = \{\varepsilon,a,b,aa,ab,ba,bb,aaa,aab,abb,baa,\ldots.\}$

2. se $L=\{a,ab,ba\}$,
allora $L^*=\{\varepsilon,a,ab,ba,aa,aab,aba,abab,abba,baa,$
$baab,baba,\ldots\}$.

Stephen Cole Kleene (1909 - 1994)

Ha insegnato alla Wisconsin University.

La sua attività di ricerca riguarda la teoria degli algoritmi, i modelli di calcolo e le funzioni ricorsive. A lui si devono alcuni dei più importanti risultati della teoria degli automi, come l'uguaglianza tra la classe dei linguaggi accettati da un DFA e quella dei linguaggi denotati da un'espressione regolare.

Le chiusure rispetto alle nuove operazioni sui linguaggi

$\mathcal{L}$(DFA) è chiusa rispetto alle operazioni di concatenazione e stella di Kleene:

Proveremo quindi che

L,L' $\in$ $\mathcal{L}$(DFA) => LL' $\in$ $\mathcal{L}$(DFA)

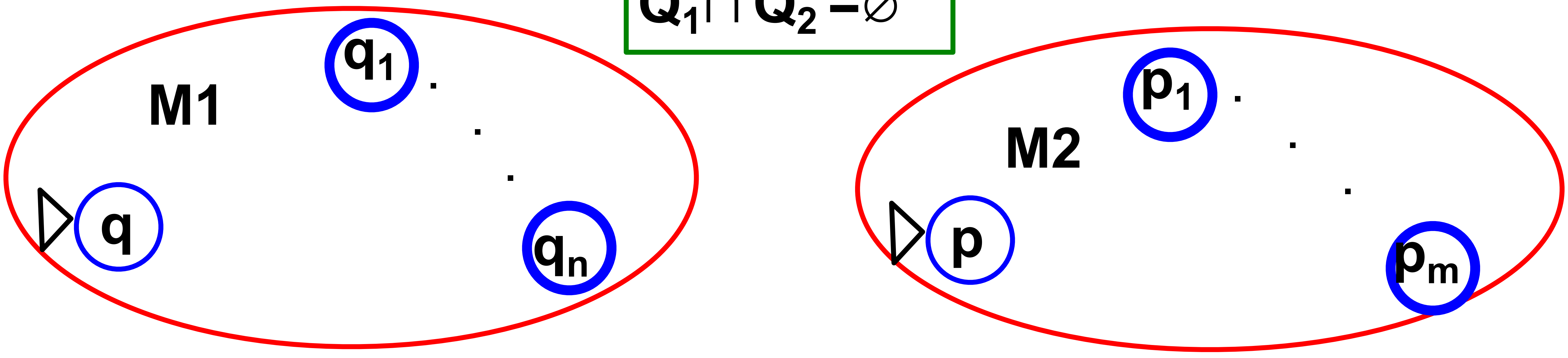
L$\in$ $\mathcal{L}$(DFA) => L* $\in$ $\mathcal{L}$(DFA)

Prodotto, M1 e M2 sono DFA

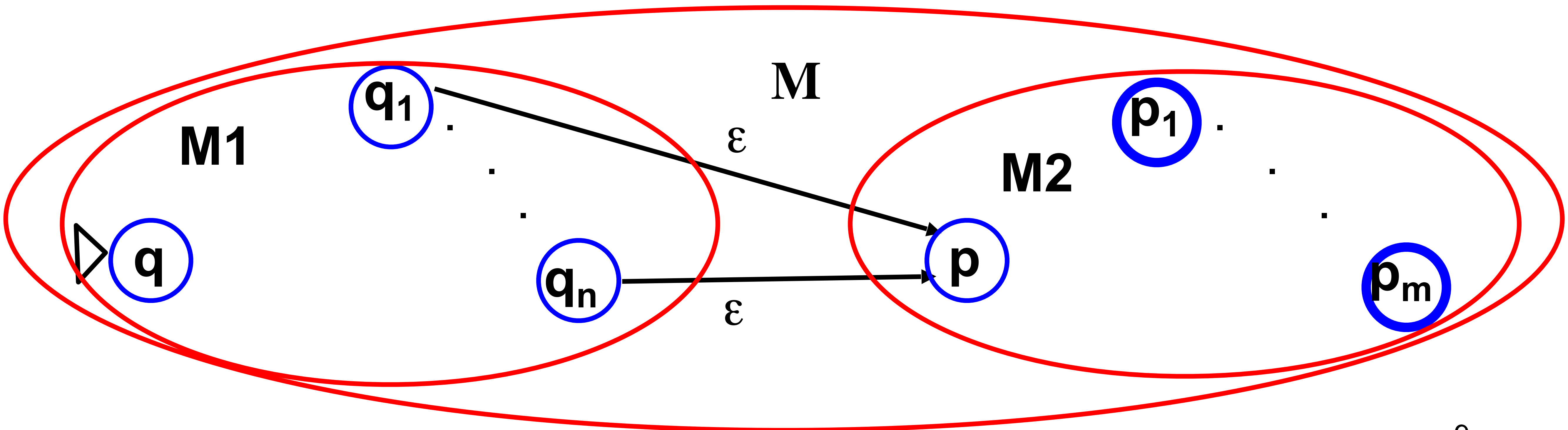
$M1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q, F_1 = \{q_1, \dots, q_n\})$

$M2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, p, F_2 = \{p_1, \dots, p_m\})$

$\boxed{Q_1 \cap Q_2 = \varnothing}$



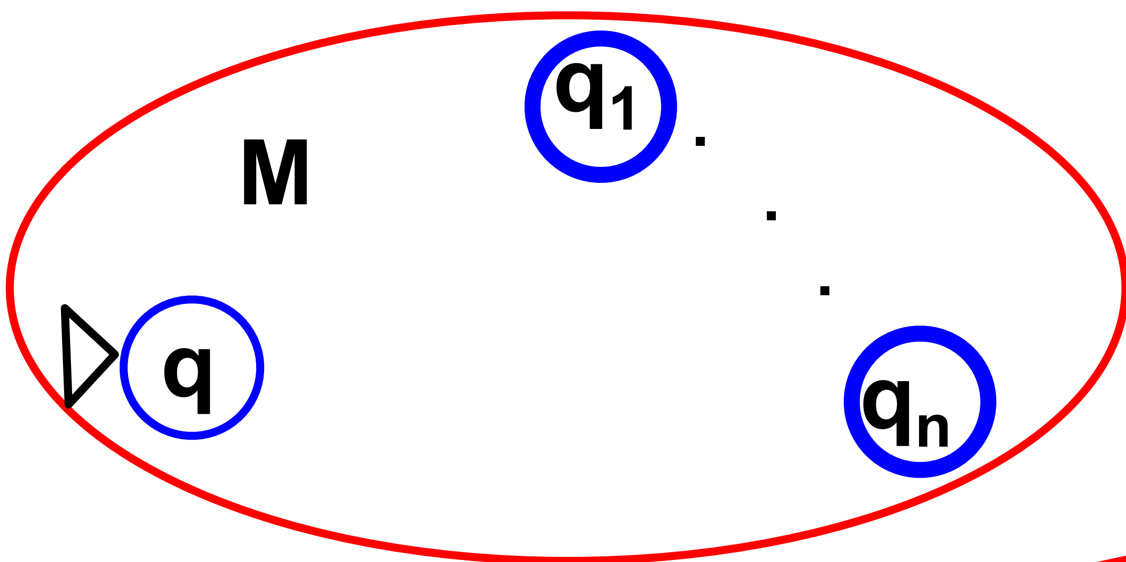
$M = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \delta, q, F = F_2)$



M è un NFA tale che L(M) = L(M1)L(M2)

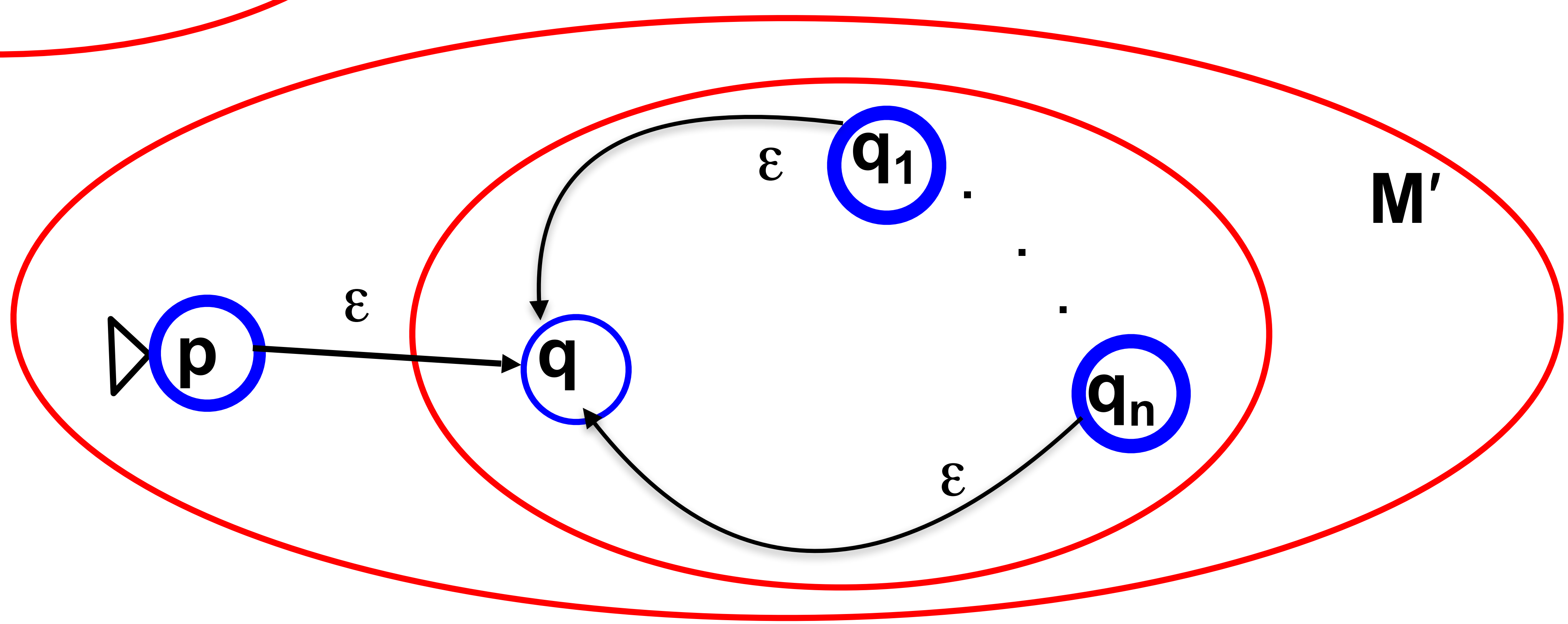
STELLA DI KLEENE, M è un DFA

$M = (Q,\Sigma,\delta,q,F=\{q_1,\ldots,q_n\})$



$\boxed{p \notin Q}$

$M' = (Q \cup \{p\},\Sigma,\delta',p,F'=F \cup \{p\})$



M′ è un NFA tale che $L(M') = L(M)^*$

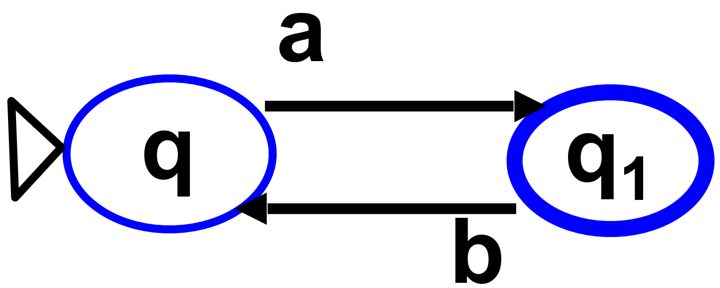
CURIOSITÀ

1. **Perchè è necessario aggiungere un nuovo stato nella costruzione dell'automa per la chiusura rispetto alla stella di Kleene?**
2. **In quale caso potrei evitare di introdurre nuove epsilon mosse nella costruzione per la chiusura rispetto al prodotto?**
3. **La classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto alla differenza tra linguaggi?**

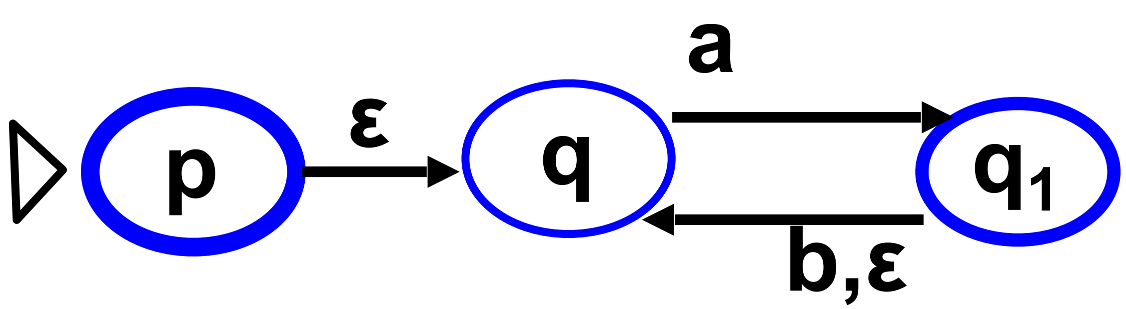
   (la differenza tra due linguaggi L ed L' è così definita $L\text{-}L' = \{x \mid x \in L \text{ e } x \notin L'\}$)

aggiunta nuovo stato per la *

M

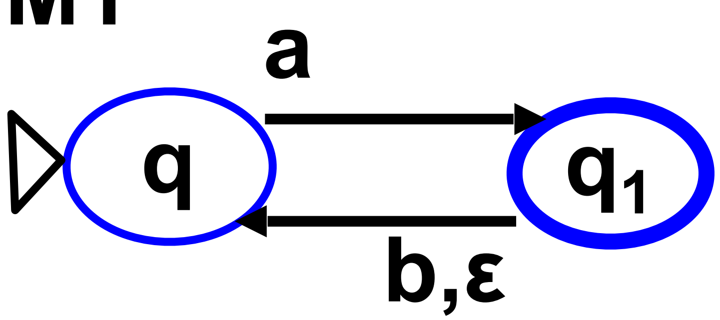


$L(M) = \{a\}\{ba\}^*$



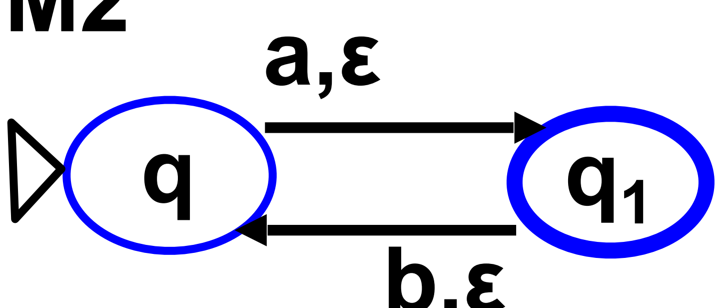
$L(M)^* = (\{a\}\{ba\}^*)^*$

M1



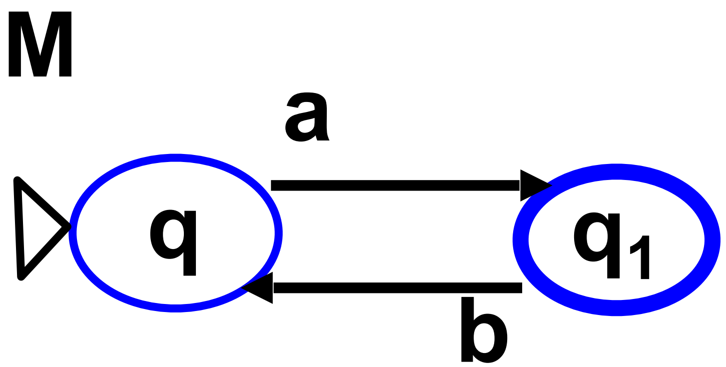
ma ε non è in L(M1),
quindi $L(M1) \neq L(M)^*$

M2

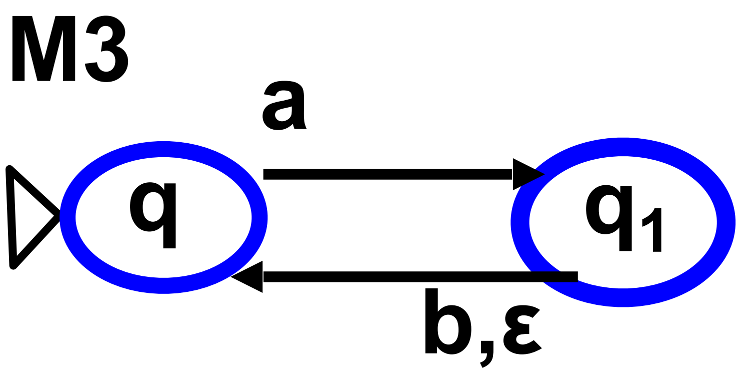


ora ε è in L(M2),
ma anche b, e quindi $L(M2) \neq L(M)^*$

aggiunta nuovo stato per la *



$L(M) = \{a\}\{ba\}^*$



ma ab è in L(M3),
quindi $L(M3) \neq L(M)^*$