

Un problema non decidibile

Problema dell'accettazione per TM: data una TM T e una parola input w per T , w è accettata da T ?

Esiste un algoritmo che, data una TM T e una parola input w per T , risponde sì se w è accettata da T e no altrimenti?

In altre parole esiste un algoritmo che risolve il problema dell'accettazione per TM o equivalentemente esiste una TM che decide il linguaggio

$$A_{TM} = \{ \langle T, w \rangle \mid T \text{ è una TM e } w \in L(T) \}$$

Non decidibilità - 1

Teorema. Il problema dell'accettazione per TM **non è decidibile.**

Prova. La prova utilizza il metodo della diagonalizzazione e l'autoreferenzialità.

Supponiamo **per assurdo** che esista una TM **M** che decide $A_{TM} = \{ \langle T, w \rangle \mid T \text{ è un TM e } w \in L(T) \}$.

$$M(\langle T, w \rangle) \begin{cases} \text{accetta se } w \in L(T) \\ \text{altrimenti rifiuta} \end{cases}$$

Complementiamo **M** e otteniamo la TM **M'**

Non decidibilità - 2

$M'(\langle T, w \rangle)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{rifiuta se } w \in L(T) \\ \text{accetta altrimenti} \end{array} \right.$

Consideriamo M' su un input ristretto, del tipo $\langle T, \langle T' \rangle \rangle$ la codifica di una TM T che prende in input la codifica di una TM T' e costruiamo una tabella con l'esito del calcolo di M' .

M'	$\langle T_1 \rangle$	$\langle T_2 \rangle$	$\langle T_3 \rangle$	$\langle T_4 \rangle$	$\langle T_5 \rangle$	$\langle T_6 \rangle$...
T_1	a	r	r	a	r	a	...
T_2	r	a	a	a	r	a	...
T_3	a	a	r	a	a	r	...
T_4	r	r	r	r	r	a	...
T_5	a	a	a	r	r	r	...
T_6	r	a	r	r	r	a	...
...							

Non decidibilità - 2

M'	<T₁>	<T₂>	<T₃>	<T₄>	<T₅>	<T₆>	...
T₁	<u>a</u>	r	r	a	r	a	...
T₂	r	<u>a</u>	a	a	r	a	...
T₃	a	a	<u>r</u>	a	a	r	...
T₄	r	r	r	<u>r</u>	r	a	...
T₅	a	a	a	r	<u>r</u>	r	...
T₆	r	a	r	r	r	<u>a</u>	...
...							

Consideriamo la TM che estrapola i risultati della diagonale
cioè costruiamo una TM $D(\langle T \rangle) = M'(\langle T, \langle T \rangle \rangle)$

In altri termini **D** si comporta come **M'** su $\langle T, \langle T \rangle \rangle$, una
TM **T** che prende in input la codifica di “se stessa”

Non decidibilità - 3

$$D(\langle T \rangle) = \begin{cases} \text{rifiuta se } \langle T \rangle \in L(T) \\ \text{accetta altrimenti} \end{cases}$$

Come si comporta D su $\langle D \rangle$?

se $\langle D \rangle \in L(D)$ allora $D(\langle D \rangle)$ rifiuta, cioè $\langle D \rangle \notin L(D)$,

se $\langle D \rangle \notin L(D)$ allora $D(\langle D \rangle)$ accetta, cioè $\langle D \rangle \in L(D)$,

L'antinomia deriva dall'ipotesi di esistenza della TM M che decide $A_{TM} = \{\langle T, w \rangle \mid T \text{ è un TM e } w \in L(T)\}$.

Il problema è dunque indecidibile.

Il problema della fermata

Problema della fermata (Halting problem): data una TM T e una parola input w per T , T si ferma su w ?

Esiste un algoritmo che risolve il problema della fermata?
In altre parole il linguaggio

$\text{Halt}_{\text{TM}} = \{ \langle T, w \rangle \mid T \text{ è un TM e si ferma su } w \}$
è decidibile?

Teorema. Il problema della fermata è indecidibile.

Prova. Supponiamo per assurdo che M sia una TM che decide Halt_{TM} :

$$M(\langle T, w \rangle) = \begin{cases} \text{accetta se } T \text{ si ferma su } w \\ \text{altrimenti rifiuta} \end{cases}$$

Il problema della fermata - prova

$$M(\langle T, w \rangle) = \begin{cases} \text{accetta se } T \text{ si ferma su } w \\ \text{altrimenti rifiuta} \end{cases}$$

Possiamo allora usare M per costruire una TM M' che decide A_{TM} **cosa che sappiamo impossibile.**

TM M' :
Sull'input $(\langle T, w \rangle)$
esegui M su $(\langle T, w \rangle)$;
se M accetta esegui T su w
se T accetta, accetta
e se T rifiuta, rifiuta
se M rifiuta, rifiuta

Poichè M accetta, T si ferma su w

$$M'(\langle T, w \rangle) = \begin{cases} \text{accetta} \\ \text{se } T \text{ accetta } w \\ \text{altrimenti rifiuta} \end{cases}$$