Sommario

Dimostrazione non decidibilità del problema dell’accettazione

Un problema non decidibile

Problema dell'accettazione per TM: data una TM T e una parola input w per T, w è accettata da T?

Esiste un algoritmo che, data in input una TM T e una parola input w per T, risponde sì se w è accettata da T e no altrimenti?

In altre parole esiste un algoritmo che risolve il problema dell'accettazione per TM o equivalentemente esiste una TM che <u>decide</u> il linguaggio

$$A_{TM} = \{< T, w > \mid T \text{ è una TM e } w \in L(T)\}$$

Non decidibilità - 1

Teorema. Il problema dell'accettazione per TM non è decidibile.

Prova. La prova utilizza il metodo della diagonalizzazione e l'autoreferenzialità.

Supponiamo per assurdo che esista una TM M che decide $A_{TM} = \{< T,w> \mid T$ è un TM e $w \in L(T)\}$.

$$M(<T,w>) \begin{cases} \text{accetta se } w \in L(T) \\ \text{altrimenti rifiuta} \end{cases}$$

Complementiamo M e otteniamo la TM M'

Non decidibilità - 2

$$M'(<T,w>) \begin{cases} \text{rifiuta se } w \in L(T) \\ \text{accetta altrimenti} \end{cases}$$

Consideriamo M' su un input ristretto, del tipo <T,<T'>> la codifica di una TM T che prende in input la codifica di una TM T' e costruiamo una tabella con l'esito del calcolo di M'.

M'	$<T_1>$	$<T_2>$	$<T_3>$	$<T_4>$	$<T_5>$	$<T_6>$	...
T_1	a	r	r	a	r	a	...
T_2	r	a	a	a	r	a	...
T_3	a	a	r	a	a	r	...
T_4	r	r	r	r	r	a	...
T_5	a	a	a	r	r	r	...
T_6	r	a	r	r	r	a	...
...							

Non decidibilità - 2

M'	$<T_1>$	$<T_2>$	$<T_3>$	$<T_4>$	$<T_5>$	$<T_6>$	...
T_1	a	r	r	a	r	a	...
T_2	r	a	a	a	r	a	...
T_3	a	a	r	a	a	r	...
T_4	r	r	r	r	r	a	...
T_5	a	a	a	r	r	r	...
T_6	r	a	r	r	r	a	...
...							

Consideriamo la TM che estrapola i risultati della diagonale cioè costruiamo una TM D(< T >)= M' (< T ,< T >>)

In altri termini D si comporta come M' su <T,<T>>, una TM T che prende in input la codifica di "se stessa"

Non decidibilità - 3

$$D(<T>) = \begin{cases} \text{rifiuta se } <T> \in L(T) \\ \text{accetta altrimenti} \end{cases}$$

Come si comporta D su < D >?

se < D > $\in$ L(D) allora D(< D >) rifiuta, cioè < D > $\notin$ L(D),

se < D > $\notin$ L(D) allora D(< D >) accetta, cioè < D > $\in$ L(D),

L'antinomia deriva dall'ipotesi di esistenza della TM M che decide $A_{TM} = \{< T,w> \mid T$ è un TM e $w \in L(T)\}$.

Il problema è dunque indecidibile.

Il problema della fermata

Problema della fermata (Halting problem): data una TM T e una parola input w per T, T si ferma su w?

Esiste un algoritmo che risolve il problema della fermata? In altre parole il linguaggio

$$Halt_{TM} = \{< T, w > \mid T \text{ è un TM e si ferma su } w\}$$

è decidibile?

Teorema. Il problema della fermata è indecidibile.

Prova. Supponiamo per assurdo che M sia una TM che decide $Halt_{TM}$:

$$M(<T,w>) = \begin{cases} \text{accetta se } T \text{ si ferma su } w \\ \text{altrimenti rifiuta} \end{cases}$$

Il problema della fermata - prova

$$M(\langle T,w\rangle)=\begin{cases}\text{accetta se } T \text{ si ferma su } w\\ \text{altrimenti rifiuta}\end{cases}$$

Possiamo allora usare M per costruire una TM M' che decide A_{TM} cosa che sappiamo impossibile.

Poichè M accetta, T si ferma su w

TM M' :
Sull'input ($\langle T,w\rangle$)
esegui M su ($\langle T,w\rangle$);
se M accetta esegui T su w
se T accetta, accetta
e se T rifiuta, rifiuta
se M rifiuta, rifiuta

$$M'(\langle T,w\rangle)=\begin{cases}\text{accetta}\\ \text{se } T \text{ accetta } w\\ \text{altrimenti rifiuta}\end{cases}$$