Sommario

- Macchina di Turing universale
- il problema dell'accettazione per TM e sua Turing riconoscibilità
- Proprietà dei problemi Turing riconoscibili
- Linguaggi non Turing riconoscibili.

UTM: la TM universale

Una TM T che accetta un linguaggio è analoga a un programma che implementa un algoritmo

Ma abbiamo affermato che le TM forniscono un modello di calcolo, cioè un modello astratto di un calcolatore con un linguaggio di programmazione.

Ora faremo vedere come costruire la UTM U, una TM che prende in input la codifica di una TM T e di un suo input w e e la esegue producendo lo stesso risultato di T su w. Questo risultato è nell'articolo di Turing del 1936 e Aaronson, informatico teorico professore all'MIT, vi si riferisce come al "lemma di esistenza dell'industria del software".

Costruzione UTM: la codifica

- **Per una TM T=($Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_a,q_r$) possiamo assumere :**
- $\Sigma = \{1,2, \ldots, |\Sigma|\}$ **e**
- $\Gamma - \Sigma = \{|\Sigma| + 1, \ldots , |\Gamma|\}$
- $Q = \{|\Gamma| + 1, \ldots , |\Gamma| + |Q|\}$
- $|\Gamma| + 1$, $|\Gamma| + 2$, $|\Gamma| + 3$ **sono rispettivamente gli stati q_0,q_a,q_r**
- **Tutti i numeri sono codificati come numeri binari di lunghezza $\lceil \log(|Q| + |\Gamma|) \rceil$**

Costruzione UTM: fine codifica

La codifica della TM T in input per U comincerà con

il numero |Q| in binario, seguito da $|\Sigma|$ e da $|\Gamma|$, separati da virgole, seguiti da

una descrizione di δ in termini di quintuple

((q,a),(p,b, *D*)), con *D* in {L,R} seguiti da

un ; che termina la descrizione di T e la separa dalla

codifica in binario della parola input $x = x_1 \ldots x_k$, con la virgola ancora usata come separatore degli interi binari che codificano i singoli simboli.

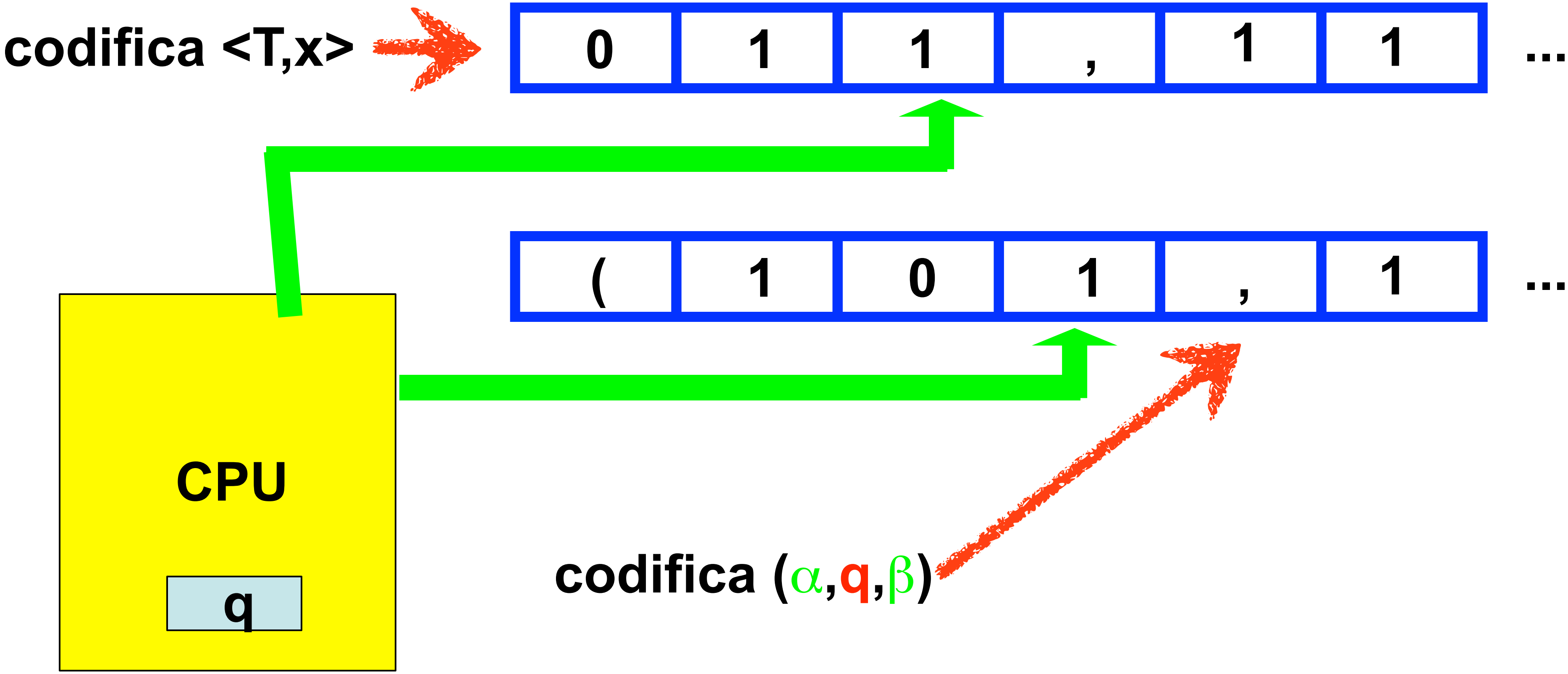
Costruzione UTM - 2

La UTM U sull'input <T,x_1 ... x_k > ha due nastri:

- **il primo contiene l'input <T,x_1 ... x_k>**
- **il secondo nastro contiene la (codifica della) configurazione corrente di T, nella forma (α,q,β) dove $\alpha\beta$ è il contenuto del nastro di T a quel punto del suo calcolo, q è lo stato in cui si trova e il simbolo in lettura è il primo di β.**

I primi passi della UTM, dopo aver verificato che l'input è una codifica corretta, servono per scrivere sul secondo nastro la codifica della configurazione iniziale, (q_0,x_1...x_k)

Macchina di Turing universale



Costruzione UTM - 4

Per simulare un passo di T:

- **U esamina il secondo nastro fino a trovare la codifica binaria dello stato corrente q (è un numero tra $|\Gamma| + 1$ e $|\Gamma| + |Q|$)**

- **cerca sul primo nastro una regola per q**

- **poi muove la testina del secondo nastro per individuare il simbolo in lettura per T e controlla se la regola in lettura sul primo nastro coinvolge lo stesso simbolo input; se sì la regola viene implementata (cambiando la configurazione sul secondo nastro in corrispondenza) altrimenti si controlla la regola successiva**

Costruzione UTM - fine

U si ferma e accetta o rifiuta quando T accetta o rifiuta, se T non si ferma anche U non si ferma.

Un problema semidecidibile ma non decidibile

Problema dell'accettazione per TM: data una TM T e una parola input w per T, w è accettata da T?

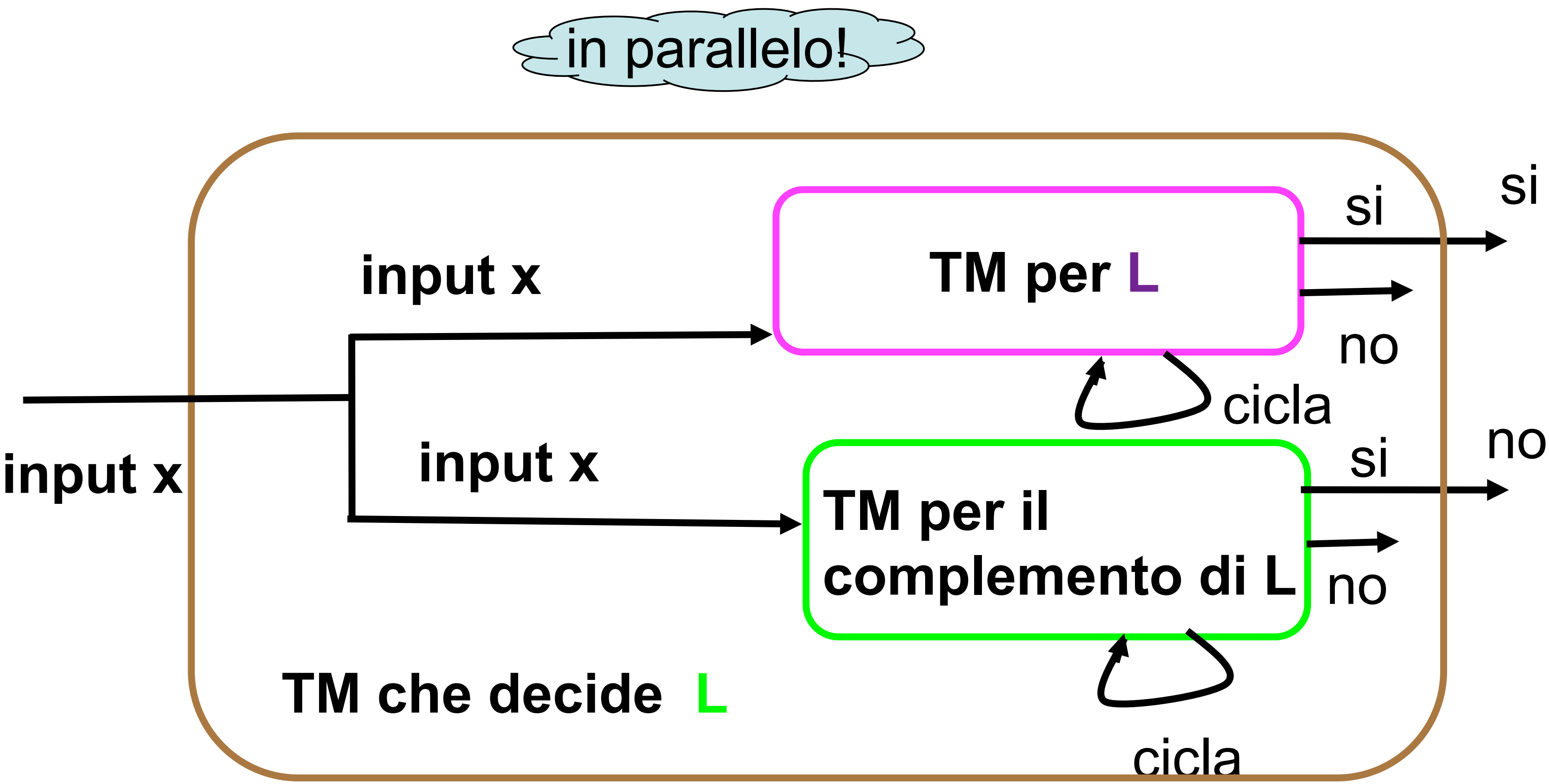
Abbiamo visto che non esiste un algoritmo che risolve il problema dell'accettazione per TM o equivalentemente che non esiste una TM che <u>decide</u> il linguaggio

$$A_{TM} = \{< T, w > \mid T \text{ è una TM e } w \in L(T)\}$$

Ma la UTM U riconosce A_{TM}.
Non lo decide perchè se T non si ferma anche U non si ferma.

Proprietà delle TM

Teorema. **Se L e il suo complemento sono Turing riconoscibili allora L è decidibile.**



Una possibile implementazione

Teorema. **Se L e il suo complemento sono Turing riconoscibili allora L è decidibile.**

Prova:

Sia la TM T1 che riconosce L e T2 quella per il suo complemento.
Costruiamo una TM T che simula T1 e T2 "in parallelo", T ha due nastri:

T sull'input x

1. **copia x sul secondo nastro**
2. **esegui una mossa di T1, sul primo nastro**
   se T1 accetta, accetta
3. **esegui una mossa di T2, sul secondo nastro**
   se T2 accetta, rifiuta
4. **torna al punto 2**

Una parola x è accettata da T1 o da T2, le parole sulle quali T1 non si ferma non sono accettate da T1 quindi sono nel complemento e sono accettate da T2

Problemi non Turing riconoscibili

Teorema. **Il complemento del problema dell'accettazione e di quello della fermata non sono Turing riconoscibili.**

Prova.

A_{TM} = {< T,w> | T è un TM e w $\in$L(T)} e
$Halt_{TM}$ = {< T, w > | T è un TM e si ferma su w} sono Turing riconoscibili.
Infatti per $Halt_{TM}$ basta modificare opportunamente la UTM in modo che accetti quando la TM in input si ferma accettando o rifiutando il suo input.
Ma sono indecidibili, quindi il loro complemento non può essere Turing riconoscibile, per il teorema precedente.

Proprietà di chiusura delle TM

Teorema. $\mathcal{L}$(TM) è chiusa rispetto a unione e intersezione.

Prova. Dati due linguaggi Turing riconoscibili, L1 ed L2, facciamo vedere che anche L1$\cup$ L2 e L1$\cap$ L2 sono Turing riconoscibili.

TM per l' Intersezione:
sull'input x
esegui T1
se T1 accetta esegui T2
se T2 accetta accetta
altrimenti rifiuta

TM per l' Unione:
sull'input x
esegui T1 e T2 in parallelo,
se una delle due accetta,
accetta
se T1 e T2 rifiutano,
rifiuta

Proprietà di chiusura delle TM - 2

E il complemento?

Teorema. La classe dei linguaggi decidibili è chiusa rispetto al complemento.

Prova. Sia T una TM che accetta L. Costruiamo una TM che accetta il complemento.

TM per il complemento:
sull'input x
esegui la TM T
se T accetta rifiuta
altrimenti accetta

T si ferma sempre!

Numerabilità e Turing calcolabilità

Ogni linguaggio numerabile è Turing riconoscibile? Si motivi la risposta.

Risposta. NO. Le TM sono codificabili in binario, cosi' some le parole sull'alfabeto di input.
Poichè $\{0,1\}^*$ è numerabile, il complemento di $A_{TM} = \{<T,w> \mid T$ è una TM e w è in $L(T)\}$ è un sottoinsieme infinito di un insieme numerabile e in quanto tale numerabile.
Ma si è dimostrato che il complemento di A_{TM} non è Turing riconoscibile.

Turing riconoscibilità

Se un linguaggio L <u>non</u> è Turing riconoscibile, il suo complemento può essere
1.decidibile?
2.Turing-riconoscibile?

decidibile? NO

Turing-riconoscibile? SI

Enumerabilità

Il linguaggio $\neg HALT_{TM}$ = {<T,w> | T è una TM e T non si ferma su w} è enumerabile?

(Sugg. Si supponga per assurdo che $\neg HALT_{TM}$ sia enumerabile e si costruisca una TM che riconosce $\neg HALT_{TM}$, utilizzando la TM che calcola la funzione di enumerazione)

Enumerabilità e Turing calcolabilità

Il linguaggio ¬$HALT_{TM}$ = {<T,w> | T è una TM e T non si ferma su w} è enumerabile?

Risposta:

Sappiamo che ¬$HALT_{TM}$ è numerabile e quindi che esiste una funzione biettiva f : N → ¬HALTM. Tale funzione non può essere Turing calcolabile altrimenti potrei utilizzarla per costruire una TM che riconosce ¬HALTM. Supponiamo sia T_f la TM che calcola f e costruiamo una TM M a 3 nastri che riconosce ¬HALTM:

M = Input <T,w>

1. inizializza il II nastro a 1

2. sia k il numero sul II nastro, esegui T_f su k utilizzando il III nastro.

3. confronta f(k) con <T,w>, se le due codifiche sono uguali allora accetta altrimenti incrementa k sul II nastro e torna al punto 2.

M si ferma e accetta se T non si ferma su w e non si ferma altrimenti, quindi M Turing riconosce ¬HALTM, cosa che sappiamo impossibile. La contraddizione nasce dall'aver supposto f calcolabile.

Decidibilità

Si dimostri che il linguaggio L = {<T,x,n> | T accetta x in n passi} è decidibile.

Soluzione:
Utilizziamo una variante della UTM, M:

input <T,x,n>
passo1. inzializziamo un contatore m a 1
passo2. esegui m passi di T su x
passo 3. se T accetta, accetta
altrimenti se m=n rifiuta, altrimenti incrementa m e torna al passo 2

T accetta x in n passi sse M accetta <T,x,n>