Turing riconoscibilità

Se un linguaggio L <u>non</u> è Turing riconoscibile, il suo complemento può essere
1.decidibile?
2.Turing-riconoscibile?

decidibile? **NO**

Turing-riconoscibile? **SI**

Decidibilità

Si dimostri che il linguaggio L = {<T,x,n> | T accetta x in n passi} è decidibile.

Soluzione:
Utilizziamo una variante della UTM, M:

input <T,x,n>
passo1. inzializziamo un contatore m a 1
passo2. esegui m passi di T su x
passo 3. se T accetta, accetta
altrimenti se m=n rifiuta, altrimenti incrementa m e torna al passo 2

T accetta x in n passi sse M accetta <T,x,n>

Esercizio 1

Si dimostri che L={<T,n> | T è una TM, n è un intero positivo e |L(T)|>n} è indecidibile.

Si dimostra per riduzione da A_{TM} .
La riduzione associa <T,n>, con n = 1 a <M,w>, in modo tale che w è in L(M) sse T accetta almeno una parola.

La riduzione è calcolata dalla TM R seguente:
R= input <M,w>
output: la coppia <T,1>
La TM T è qui definita:
T= input x
esegui M su w e
se M accetta w, accetta x
se M rifiuta w, rifiuta x.

E' chiaro che se M accetta w allora L(T) = {0,1}*, e quindi <T,1> è in L.
mentre se w non è in L(M), L(T) = ∅ e quindi <T,1> non è in L.

Esercizio 2

Si dimostri che i seguenti linguaggi A e B sono indefinibili e che uno dei due è Turing riconoscibile mentre l'altro no:
A= {<M> | M è una TM e |L(M)| ≤ 172}
B= {<M> | M è una TM e |L(M)| > 172}

B è Turing riconoscibile.

TM che riconosce B:
input <M>
1. inizializza un contatore p a 1, e un contatore m a 1
2. esegui p passi di M sulle parole x con |x| ≤ p
per ogni parola accettata da M in al più p passi incrementa m, se m >172 accetta altrimenti, incrementa p e torna al punto 2

Esercizio 2

Si dimostri che i seguenti linguaggi A e B sono indefinibili e che uno dei due è Turing riconoscibile mentre l'altro no:
A= {<T> | T è una TM e |L(T)| ≤ 172}
B= {<T> | T è una TM e |L(T)| > 172}

B non è decidibile, si può dimostrare per riduzione da A_{TM}. La riduzione associa <T> a <M,w>, in modo tale che w è in L(M) sse L(T) contiene più di 172 parole.

TM che calcola la riduzione R:
input <M,w>
Output T
La TM T è così descritta:
T= input x
esegui M su w e
se M accetta w, accetta x
se M rifiuta w, rifiuta x.

E' chiaro che se M accetta w allora L(T) = {0,1}*, e quindi <T> è in B.
mentre se w non è in L(M), L(T) = ∅ e quindi <T> non è in B.

Esercizio 2

Si dimostri che i seguenti linguaggi A e B sono indefinibili e che uno dei due è Turing riconoscibile mentre l'altro no:
A= {<T> | T è una TM e |L(T)| ≤ 172}
B= {<T> | T è una TM e |L(T)| > 172}

Abbiamo dimostrato che B non è decidibile, ma Turing riconoscibile, quindi A, che è il complemento di B, non può essere decidibile, ma nemmeno Turing riconoscibile perchè altrimenti B sarebbe decidibile.

Esercizio 3

Si consideri il linguaggio L = { <T> | T è una TM e L(T)={xx | x è in {0,1}*}
Si costruisca una riduzione da A_{TM} a L.
L è indecidibile? L è Turing riconoscibile? Si motivi le risposte.

La riduzione deve mandare un'istanza di A_{TM} , <M,w>, in un'istanza di L, T, in modo tale che <M,w> è in A_{TM} sse T è in L.

La riduzione è calcolata dalla seguente TM R:

R= input <M,w>
output: la codifica della TM T di seguito descritta.
T = input x
if x non è della forma yy, per una qualche y in {0,1}* then rifiuta
else
esegui M su w
if M accetta w then T accetta x
if M rifiuta w then T rifiuta x

Se M accetta w allora L(T)= {xx | x è in {0,1}*} altrimenti L(T) = ∅ e quindi la riduzione è corretta.
In virtù della riduzione L è indecidibile.

Esercizio 3

Si consideri il linguaggio L = { <T> | T è una TM e L(T)={xx | x è in {0,1}*}
Si costruisca una riduzione da A_{TM} a L.
L è indecidibile? L è Turing riconoscibile? Si motivi le risposte.

Per la Turing riconoscibilità dovremmo costruire una TM che riconosce L. Osserviamo che la riduzione $A_{TM} \leq L$ già mi dice che complemento di L non è Turing riconoscibile, perchè equivale a $\neg A_{TM} \leq \neg L$ e sappiamo che $\neg A_{TM}$ non è Turing riconoscibile. Se si riduce $A_{TM} \leq \neg L$, si dimostra che anche L non è Turing riconoscibile, perchè equivale a dimostrare $\neg A_{TM} \leq L$.

R= input <M,w>
output: la codifica della TM T di seguito descritta.
T = input x
if x è della forma yy, per una qualche y in {0,1}* then accetta
else
esegui M su w
if M accetta w then T accetta x
if M rifiuta w then T rifiuta x

Se M accetta w allora L(T)={0,1}*, mentre se M non accetta w allora L(T) = {xx | x è in {0,1}*}. Quindi a un'istanza sì di A_{TM} si è associata un'istanza sì di ¬L, e a un'istanza no di ATM un'istanza no di ¬L, cioè una TM T in L.