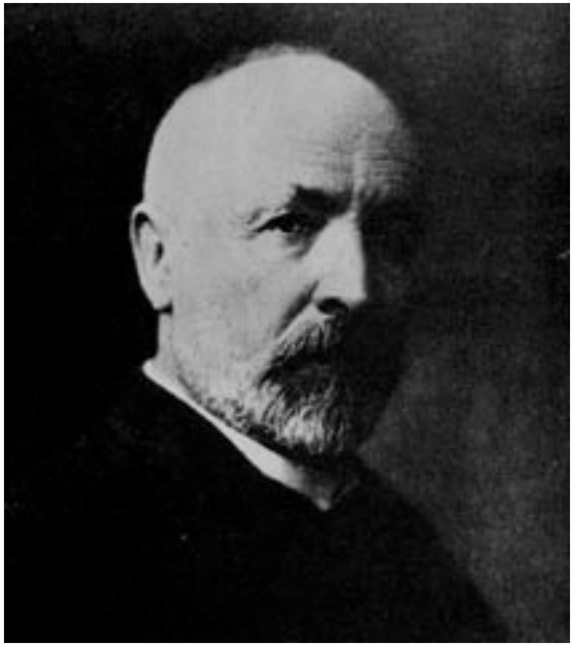
Sommario

- **Il metodo della diagonalizzazione di Cantor**

La diagonalizzazione.

Ricorderete che Georg Cantor ha inventato il metodo diagonalizzazione per dimostrare che i numeri reali hanno una cardinalità diversa da quella dei naturali.



Georg Cantor (1845 -1918)

Enumerabilità

Un insieme infinito è enumerabile se può essere messo in corrispondenza biunivoca con quello dei numeri naturali.

Esempio: Sia P l'insieme dei numeri pari, la funzione $f : N \rightarrow P$, tale che $f(n) = 2n$ è una corrispondenza biunivoca.

x	f(x)
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
	...

$f : X \rightarrow Y$ è una biezione o è biunivoca se

- $\forall x,u$ in X $x \neq u \Rightarrow f(x) \neq f(u)$ (iniettività)
- $\forall y$ in Y $\exists\, x$ in X tale che $f(x) = y$ (suriettività)

Enumerabilità - 2

Esempio: Sia N^+ l'insieme dei numeri positivi, la funzione $f : N \rightarrow N^+$, tale che $f(n) = n+1$ è una corrispondenza biunivoca.

x	f(x)
0	1
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	7
	...

Non enumerabilità dei reali

Prova per assurdo. Supponiamo che R sia numerabile, allora esiste una funzione biunivoca f: $N^+ \rightarrow R$ che può essere rappresentata in una tabella del tipo

x	f(x)
1	7.4875690. . .
2	33.3333333 . . .
3	0.8362719 . . .
4	65.4971652 . . .
5	0.3384615 . . .
6	0.3442623 . . .
	...

Costruiamo un numero reale che non può essere nell'elenco, contraddicendo la suriettività della funzione f.

y = 0, 5 4 2 5 5 1 ...

y non può stare nell'elenco perchè per ogni k, la sua k-sima cifra decimale è diverso dalla k-sima cifra decimale del k-simo numero nell'elenco.

Enumerabilità delle parole

Definiamo l'ordine canonico o quasi-lessicografico sulle parole:

Ordiniamo le lettere dell'alfabeto, poi estendiamo l'ordine alle parole come segue:

$$x < y \text{ se } \begin{cases} |x|<|y| \text{ oppure} \\ |x| = |y| \text{ e } x \text{ precede } y \text{ nell' ordine lessicografico determinato dall'ordinamento sulle lettere.} \end{cases}$$

L'ordinamento produce una corrispondenza biunivoca con N.

Non enumerabilità dei linguaggi

Un linguaggio può essere messo in corrispondenza biunivoca con una sequenza binaria di lunghezza <u>infinita</u>.

Esempio1: $\Sigma = \{a,b\}$, $L = \{ a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$\Sigma^* =$	ε	a	b	aa	ab	ba	bb	aaa	aab	aba	abb	baa	...	bbb	aabb ...
f(L) =	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	...	0	1 ....

Esempio2: $\Sigma = \{a,b\}$, $L = \{ ab^n \mid n \geq 0\}$

$\Sigma^* =$	ε	a	b	aa	ab	ba	bb	aaa	aab	aba	abb	baa	...	bbb	...	abbb	...
f(L) =	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	...	0	...	1	...

Non numerabilità delle sequenze binarie di lunghezza infinita

Metodo della diagonalizzazione

x	f(x)
1	000111101 . .
2	111100101 . . .
3	100001101 . . .
4	010001111 . . .
5	000110101 . . .
6	101000001 . . .
	...

Allora y = 1 0 1 1 0 1 ...

non può essere in elenco, perchè per ogni i, l'i-sima sequenza binaria di lunghezza infinita differisce da y nella i-sima posizione.

Esistenza di problemi per i quali non esistono algoritmi

1. Un algoritmo è una stringa di lunghezza finita. Quindi disponiamo di un'infinità numerabile di algoritmi.

2. Ogni problema di decisione può essere visto come un linguaggio, quello delle stringhe che descrivono istanze con soluzione SI. Quindi l'insieme dei problemi ha la cardinalità del continuo.

Conclusione: necessariamente esistono dei problemi per i quali non c'è un algoritmo

Ma vorremmo poter esibire un **particolare problema** per il quale non esiste un algoritmo.

Esercizio sull'enumerabilità

Si dimostri che l'insieme dei linguaggi regolari è enumerabile e che quello dei linguaggi non regolari non è enumerabile.