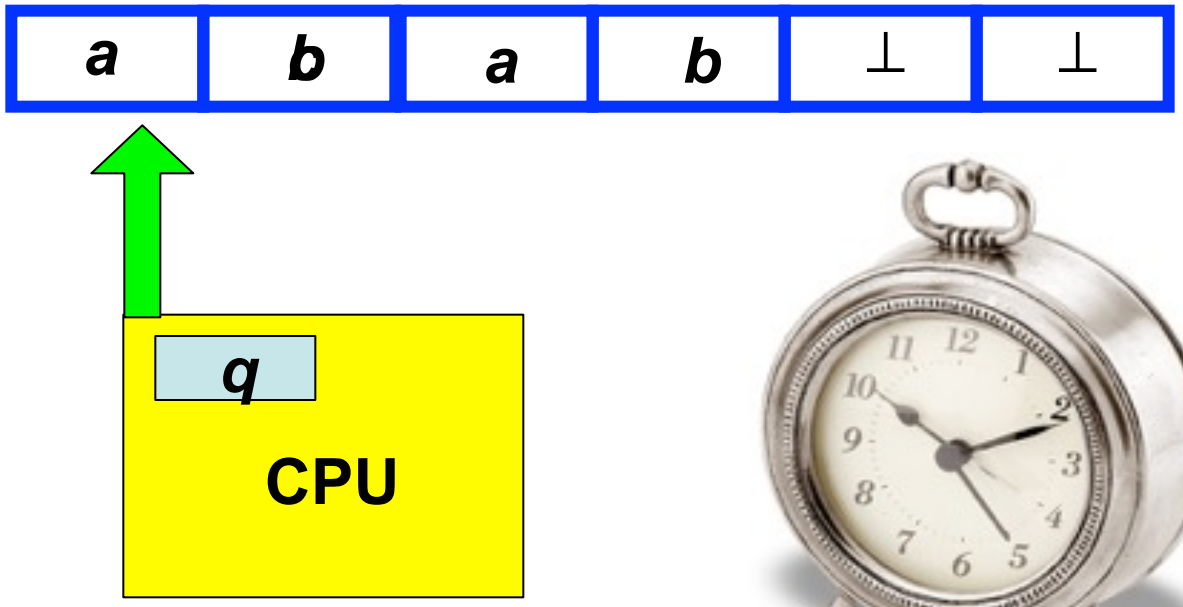
Sommario

- **Complessità di tempo e spazio di una TM che si ferma sempre.**
- **Relazioni tra le due misure**
- **Analisi complessità delle TM costruite per dimostrare che più nastri o il non determinismo non aumentano il potere computazionale del modello**
- **Definizione classi di complessità**

Complessità di tempo di una TM M



Da ora in poi consideriamo **solo** TM che si **fermano sempre**

Contiamo i passi!

La funzione complessità di tempo restituisce, su un valore $n \geq 0$, il massimo numero di passi che la TM compie su un input di dimensione n.

Il caso peggiore!

Esempio: la TM T che riconosce $\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$

su input del tipo 10^{n-1} T termina in un passo rifiutando

su input del tipo 0^m1^m tale che $2m = n$
T compie $m+1$ passi per la prima coppia 01 per ottenere sul nastro $X0^{m-1}Y1^{m-1}$
poi la TM torna indietro di $m+1$ posizioni e compie altri $m+1$ passi per la seconda coppia...

Ogni volta la distanza tra lo 0 e l'1 corrispondente è m
quindi complessivamente si compiono $O(n^2)$ passi:

$$t_T(n) = O(n^2)$$

N.B. Per ogni T in TM, assumiamo che un input di lunghezza n dovrà essere letto interamente almeno in un caso, e quindi che vale sempre $t_T(n) \geq n$.

Dimensione input

La complessità di tempo o di spazio è sempre misurata in funzione della dimensione dell'input, quindi la rappresentazione dei dati può fare differenza.

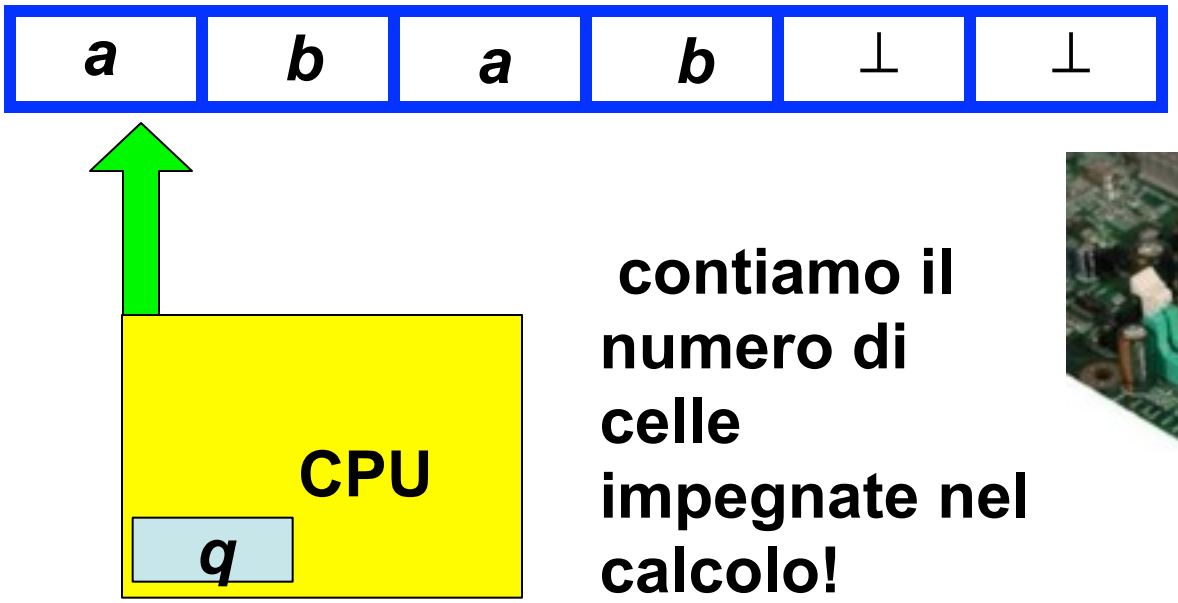
In questo contesto ogni rappresentazione ragionevole va bene.

Per un numero
per es 17

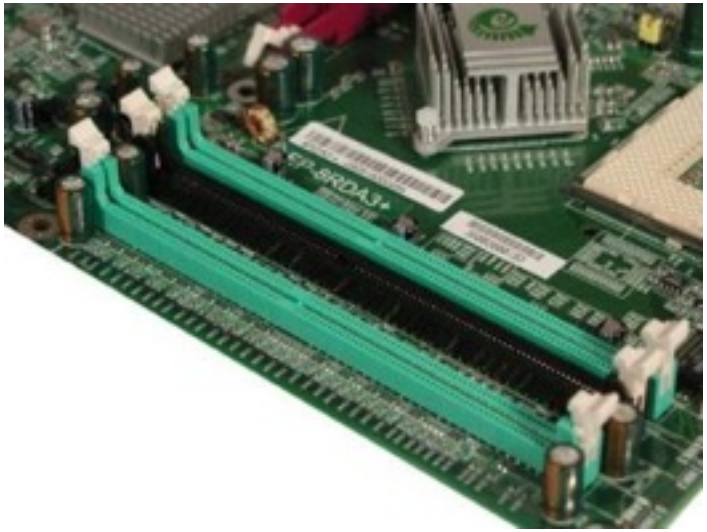
vanno bene
17
10001

non va bene
1^{17} = 11111111111111111

Complessità di spazio di una TM M



contiamo il numero di celle impegnate nel calcolo!



Definiamo la funzione complessità di spazio, s_M, di una TM come una funzione che, su n, restituisce il massimo numero di celle impegnate in una computazione su un input di dimensione n.

N.B. **Anche in questo caso $s_M(n) \geq n$**

Relazione tra spazio e tempo

Conoscendo la complessità di tempo possiamo limitare superiormente quella di spazio?
Poichè ogni nuova cella visitata comporta un passo di calcolo è evidente che per ogni TM T:

$$s_T(n) \leq t_T(n)$$

E se si conosce la complessità di spazio $s_T(n)$ possiamo limitare superiormente quella di tempo?
Osserviamo che ogni passo di calcolo comporta una diversa configurazione, quindi se si contano le possibili configurazioni diverse si ottiene un limite superiore alla complessità di tempo.

Relazione tra spazio e tempo - 2

Se la complessità di spazio è $s_T(n)$ allora il contenuto del nastro in ogni passo di calcolo è una parola di lunghezza al più $s_T(n)$. Estendendo ogni configurazione alla lunghezza massima, possiamo considerare le parole di lunghezza $s_T(n)$.

Se d è il numero di simboli dell'alfabeto di nastro, il numero delle parole di lunghezza $s_T(n)$ è $d^{s_T(n)}$

Relazione tra spazio e tempo - 2

Tenendo conto che in ogni stato si può avere un qualsiasi contenuto di nastro, detto q il numero degli stati, abbiamo

$$q * d^{s_T(n)}$$

e infine tenendo conto che la testina di lettura può trovarsi su una cella qualunque, il numero delle configurazioni è

$$q * s_T(n) * d^{s_T(n)}$$

In conclusione $t_T(n) \leq 2^{O(s_T(n))}$

Spazio, tempo e numero di nastri

La complessità di spazio di una TM T a k nastri, $s_T(n)$, è $s_T(n)$ è il massimo numero di celle impegnate in una computazione su input x di lunghezza n, su tutti i nastri}

Teorema. Se L è riconosciuto da una TM con k nastri con complessità di spazio $s_T(n)$, allora L è riconosciuto da una TM a un solo nastro con complessità di spazio $O(s_T(n))$.

E per il tempo?

Tempo e numero di nastri

Teorema. Se L è riconosciuto da una TM con k nastri con complessità di tempo $t_T(n)$, allora L è riconosciuto da una TM a un solo nastro con complessità di tempo $O(t^2_T(n))$.

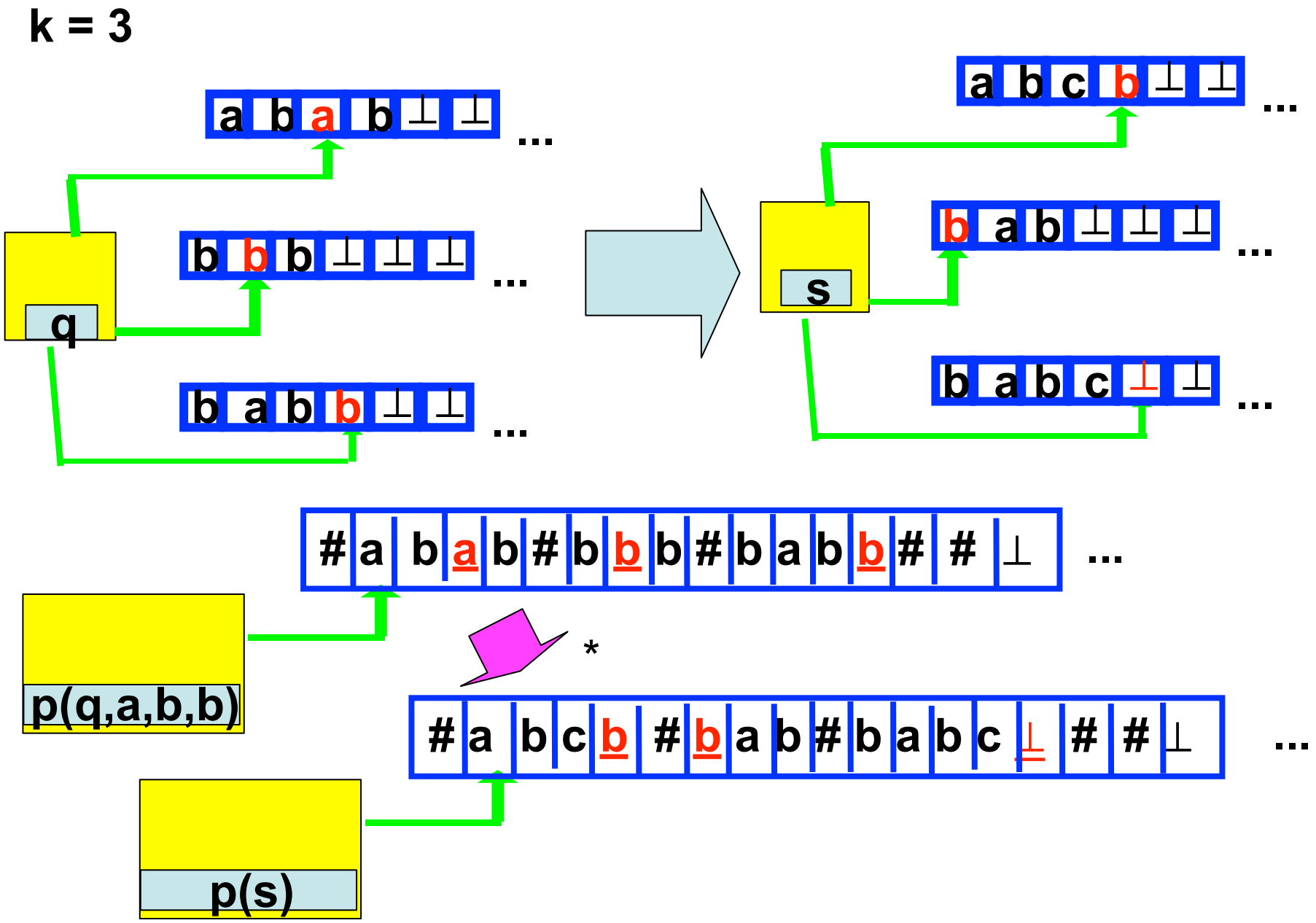
Prova. Ricordiamo che la TM a un solo nastro inizializza il proprio nastro per predisporre la simulazione della macchina a k nastri.

Alla fine di questa fase avremo questo contenuto sul nastro:

$$\$p(q_0)\underline{a_1}...a_n\ \#\underline{\sqcup}\#\ ...\ \underbrace{\underline{\sqcup}\#\underline{\sqcup}}_{\text{k-1 volte}}\#\#$$

dove $a_1...a_n$ è la stringa input. Questo costa O(n).

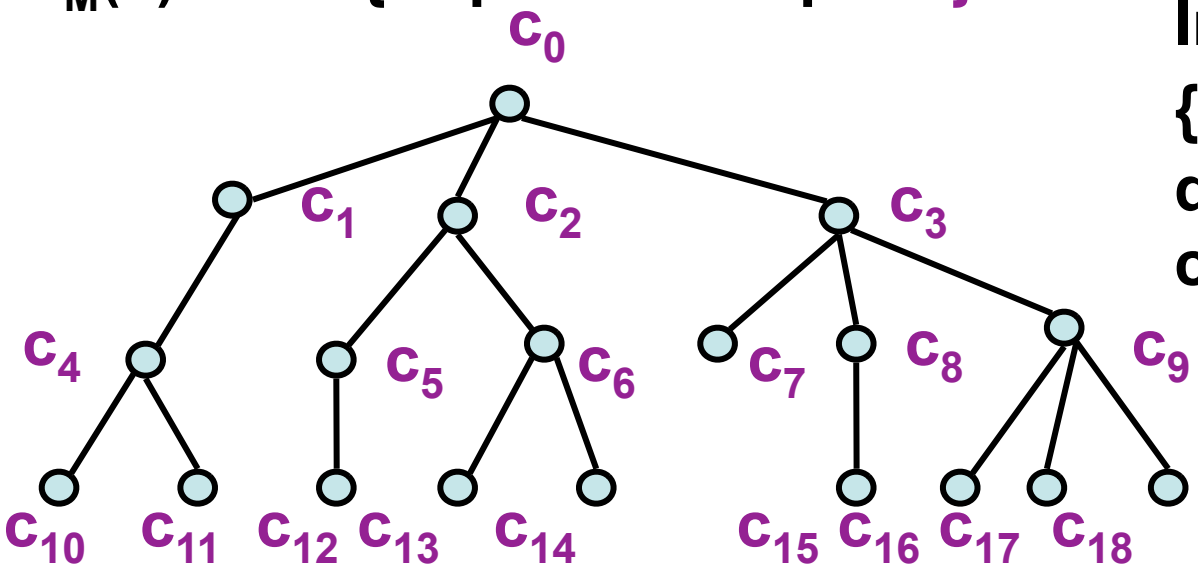
Simulazione di una mossa



Complessità di tempo di una NTM M

Definiamo la funzione $T_M : \{a,b\}^* \rightarrow N$ tale che

$T_M(x)$ = max{n° passi su input x}



In altre parole $T_M(x)$: $\{a,b\}^* \rightarrow N$ è l'altezza dell'albero di computazione di x.

Anche qui $t_T(n) \geq n$.

Definiamo la funzione $t_M : N \rightarrow N$ tale che

$t_M(n)$ = max{$T_M(x)$ per x di lunghezza n}

Il caso peggiore!

In altre parole $t_M(n) : N \rightarrow N$ è l'altezza dell'albero di computazione più alto tra tutti quelli determinati da input di lunghezza n.

Complessità di spazio di una NTM M

Definiamo la funzione $S_M : \{a,b\}^* \rightarrow N$ tale che
$S_M(x)$ = max{n° celle impegnate in ogni computazione su input x}

Definiamo la funzione $s_M : N \rightarrow N$ tale che:
$s_M(n)$ = max{$S_M(x)$ su input x di lunghezza n}

Anche qui $s_T(n) \geq n$.

Spazio, tempo e nontederminismo

Sappiamo costruire una TM equivalente a una NTM data.

Possiamo mettere in relazione le complessità di tempo e spazio delle macchine?

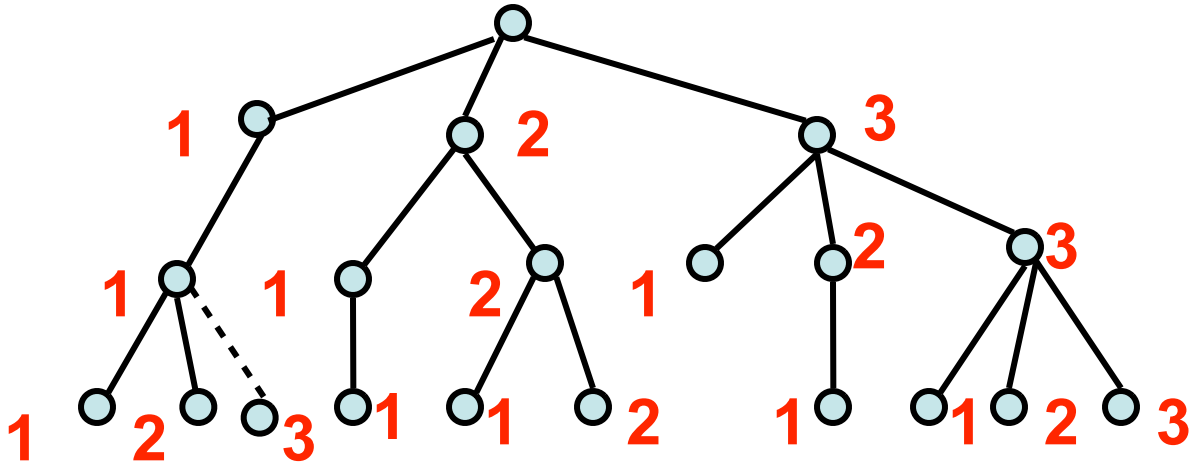
Dobbiamo prima modificare la costruzione della TM in modo che si fermi quando la NTM data si ferma!

Una TM equivalente a una NTM che non si ferma sempre

- Sia **M = (Q,Σ, Γ,δ,q_0, q_a , q_r) la NTM da simulare.**
- **Sia d = max {|δ(q,a)| q in Q e a in Γ }**
- **Sia D = {1,2...,d} l'alfabeto delle sequenze guida**
- **Sia M_0 la TM che genera e scrive sul nastro la sequenza successiva a quella data in input.**
- **La TM M' equivalente a M è una 3-TM che esegue tutte le possibili esecuzioni della NTM nell'ordine dettato dalle sequenze guida sul terzo nastro. Queste ultime vengono generate e aggiornate dalla copia della TM M_0 incorporata in M'. Come visto, la TM M' usa il secondo nastro per ogni esecuzione, e conserva l'input sul primo per poterlo ricopiare e avviare la successiva esecuzione. M' si ferma e accetta quando M si ferma e accetta.**
- **In tutti gli altri casi non si ferma, perchè genera la successiva sequenza sul terzo nastro e ricomincia la simulazione.**

Una TM equivalente a una NTM che si ferma sempre: il caso del rifiuto

Una parola è rifiutata se ogni cammino di computazione su di essa è di rifiuto :

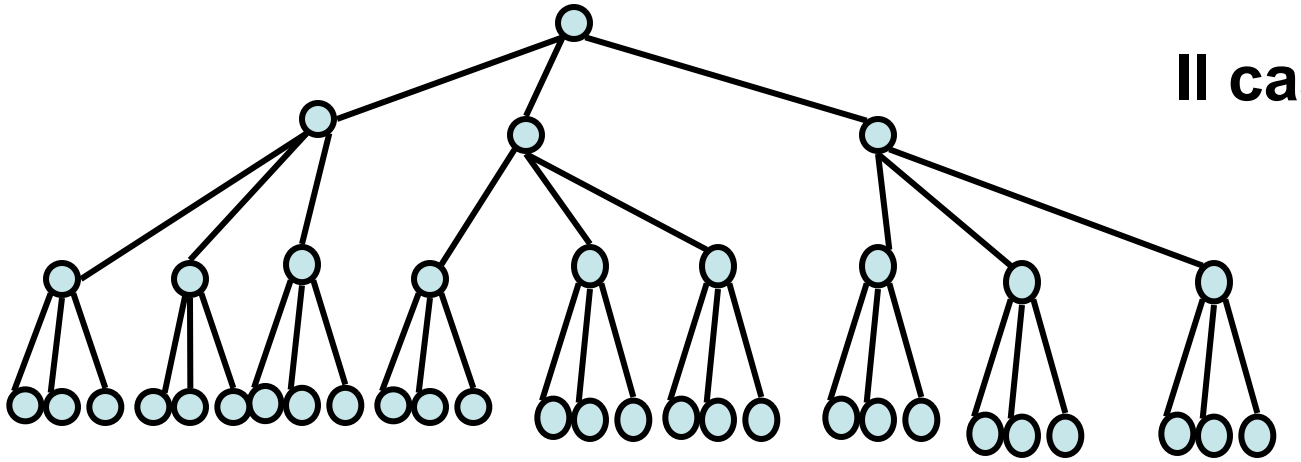


Aggiungiamo un contatore, il IV nastro, che sarà inizializzato a 1 ogni volta che si genera sul III nastro una sequenza del tipo 1^n, cioè quando si simula il cammino più a sinistra.

Il contatore verrà incrementato di 1 ogni volta che la computazione guidata dalla sequenza sul terzo nastro produce uno stato di rifiuto o fallisce. Il contatore viene confrontato con d^n, quando si genera sul IV nastro la sequenza d^n ,cioè si simula l'ultimo cammino di computazione di lunghezza n, e se i due valori coincidono si ferma e rifiuta.

Spazio, tempo e nontederminismo -2

Otteniamo un limite superiore alla complessità di tempo della TM deterministica equivalente alla NTM data, considerando il più grande albero di computazione possibile.
Si tratta dell'albero *d*-ario completo di altezza la complessità di tempo $t_T(n)$, dove d è il massimo grado di non determinismo.



Il caso di *d*=3

Spazio, tempo e nontederminismo - 3

Il numero dei nodi di un albero *d*-ario completo di altezza $t_T(n)$ è

$$(d^{t_T(n)+1} - 1)/(d-1) = O(d^{t_T(n)})$$

Quindi nel passaggio da una NTM alla TM equivalente la complessità di tempo diventa $O(t_T(n) d^{t_T(n)}) = 2^{O(t_T(n))}$.

Teorema. Se L è riconosciuto da una NTM con complessità di tempo $t_T(n)$, allora L è riconosciuto da una TM con complessità di tempo

$$2^{O(t_T(n))}$$

Classi di complessità

Chiamiamo

(N)TIME(f(n))

la classe dei linguaggi decisi da una (N)TM in tempo O(f(n))

Chiamiamo

(N)SPACE(f(n))

la classe dei linguaggi decisi da una (N)TM in spazio O(f(n))

Classi notevoli

La classe dei linguaggi decisi in tempo polinomiale da una TM:

$$P = \bigcup_{k \geq 0} TIME(n^k)$$

La classe dei linguaggi decisi in tempo polinomiale da una NTM

$$NP = \bigcup_{k \geq 0} NTIME(n^k)$$

Evidentemente

$$P \subseteq NP$$

La classe P

In virtù della tesi di Church-Turing possiamo parlare di P come della classe dei problemi risolvibili in tempo polinomiale.

La tesi di Cobhan-Edmonds afferma che possiamo parlare di P come della classe dei problemi trattabili.

La definizione di Jack Edmonds (1962)
Efficiente: tempo polinomiale per tutti gli inputs.
Inefficiente: tempo esponenziale per qualche inputs.

La classe P

A sostegno della tesi di Cobhan-Edmonds troviamo la tesi di Church-Turing estesa che afferma che tutto ciò che possiamo calcolare in tempo $t(n)$ su un modello di calcolo universale e ragionevole può essere calcolato con una TM in tempo $t(n)^{O(1)}$.

Quindi P è invariante rispetto al modello di calcolo.

O in altre parole:

Church-Turing estesa: ogni modello di calcolo fisicamente realizzabile definisce lo stesso insieme di problemi efficientemente risolvibili.

La classe P

A sostegno della tesi di Cobham-Edmonds notiamo anche che
P è chiusa rispetto alle principali operazioni sugli algoritmi:
composizione in sequenza,
utilizzo di un algoritmo all'interno di un ciclo in un altro algoritmo, oppure
utilizzo di un algoritmo, tra le varie istruzioni del nuovo

Infatti possiamo
sommare,
moltiplicare o
comporre funzionalmente tra loro polinomi ottenendo ancora polinomi.

Per contro se il grado del polinomio è "grande" la trattabilità non è più così realistica, ma considerazioni di tipo empirico portano a pensare che se un problema "naturale" si risolve in tempo polinomiale, lo è con una complessità polinomiale di grado piccolo (≤ 3)

Esempi di problemi in P

- **Tutti i problemi di decisione per FA: il problema del vuoto, il problema dell'infinito, il problema dell'appartenenza, il problema dell'equivalenza...**
- **Alcuni problemi di decisione per CFG: il problema dell'appartenenza per CFG (l'algoritmo CYK!), il problema del vuoto, del finito.**
- **Ben noti problemi sui grafi: connessione di un grafo non diretto, esistenza di un cammino tra due nodi,etc.**

Esempio di problema in NP

FACTOR: Dati due interi positivi z e U, c'è un divisore non banale di z minore di U?

Istanza 1. z = 23.536.481.273 e U = 110.000.
risposta SI: z = 104.729 x 224.737.

Istanza 2. z = 23.536.481.273 e U = 100.000.
risposta NO : 104.729 x 224,737 è la fattorizzazione in fattori primi di z.

Istanza 3. z = 23.536.481.277 e U = 23.536.481.277
risposta NO : z è un numero primo.

Algoritmo deterministico esponenziale per FACTOR

```
CercaFattori(x,U)
prec: U ≤ √x
      k = 2
      while k ≤ U
           if x mod k = 0 then "SI"
          else k = k +1
      "NO"
```

Analisi complessità:
L'algoritmo CercaFattori nel caso peggiore esegue U volte il ciclo e $U \leq \sqrt{x}$. Quindi se n è la lunghezza della rappresentazione binaria di x (quindi x è minore di 2^n) allora l'algoritmo ha una complessità in $O(2^{n/2})$. Infatti considera tutti i numeri binari tra 2 e $2^{n/2}$.
Per es. se $x = 2^{1024}$, cioè circa 10^{308}, ci sono circa 10^{154} numeri da verificare.

Algoritmo non deterministico e polinomiale per FACTOR

CercaFattoriNonDet(x,U)
"non deterministicamente prendi un numero k tra 2 e U"
if x mod k = 0 then "SI" else "NO"

Analisi complessità:
L'algoritmo CercaFattoriNondet lavora in tempo polinomiale

Nel 1994 Peter Shor (MIT) ha sviluppato un algoritmo probabilistico in grado di risolvere FACTOR in tempo polinomiale con un calcolatore quantistico. In particolare l'algoritmo ha complessità di tempo in $O(\lg^3 n)$ e di spazio in $O(\lg n)$, dove n è il numero dato in input. Nel 2001 il primo calcolatore quantistico su cui è stato fatto girare l'algoritmo ha potuto fattorizzare 15.

Esempi di problemi in NP

- **Il problema della soddisfacibilità per formule booleane, per formule booleane in CNF, in 3CNF,...**

- **molti problemi sui grafi: l'esistenza di una k-colorazione, di un k-clique con k in input, di un ciclo hamiltoniano in un grafo diretto,...**