Automi a stati finiti

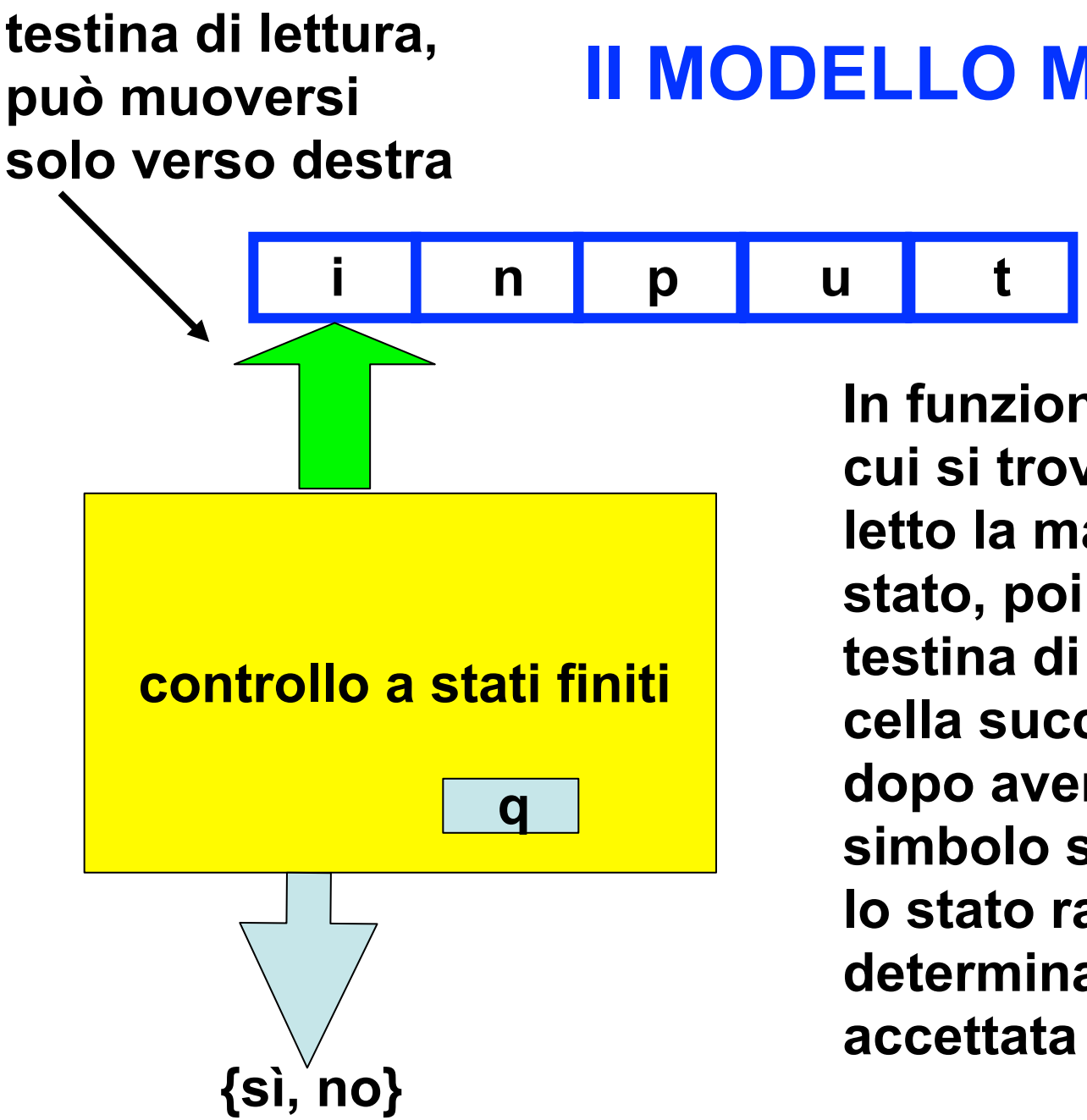
- **Il modello: la definizione formale, esempi.**
- **Le definizioni utili per descrivere e provare proprietà degli automi: configurazioni, relazione “porta a” e relative definizioni di linguaggio accettato.**

Automi a stati finiti

Hanno applicazioni in

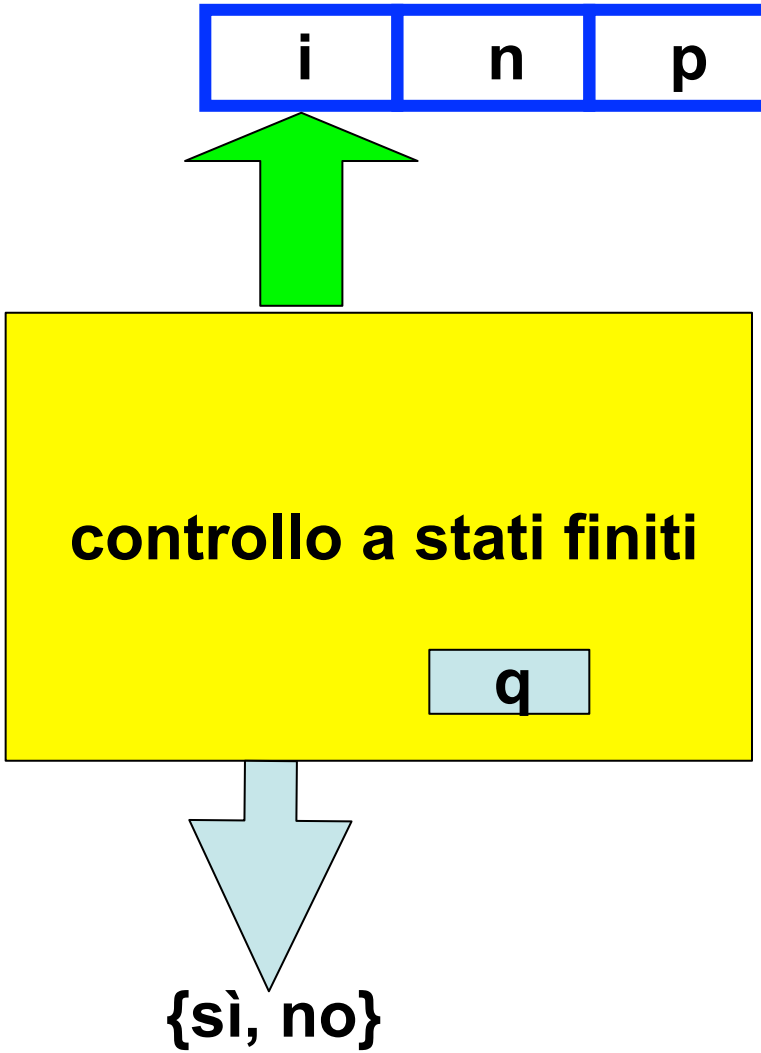
- verifica dei circuiti digitali e dei protocolli,
- compilatori,
- pattern recognition,
- etc.

Il MODELLO MENTALE



In funzione dello stato in cui si trova e dell'input letto la macchina cambia stato, poi sposta la testina di lettura sulla cella successiva. Termina dopo aver letto l'ultimo simbolo sul nastro input; lo stato raggiunto determina se la parola è accettata o no.

Un esempio di esecuzione



La macchina incorpora un programma con istruzioni del tipo:

nello stato q se leggi i vai nello stato p

nello stato p se leggi n vai nello stato q ...

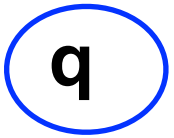
A ogni passo la testina di lettura si sposta di una cella a destra.

La macchina si ferma quando ha letto tutto l'input.

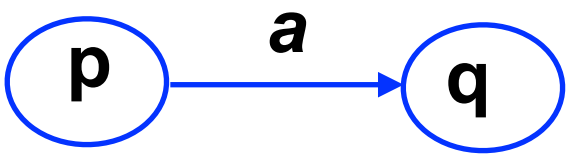
DIAGRAMMA DEGLI STATI

È un grafo diretto in cui

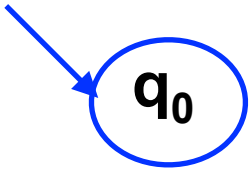
- **ogni nodo corrisponde a uno stato**



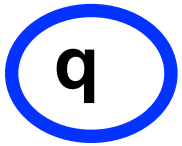
- **tra una coppia di nodi corrispondenti agli stati p e q c'è un arco con etichetta a se c'è la regola nello stato p se leggi *a* vai nello stato q**



- **lo stato iniziale q_0 è denotato**

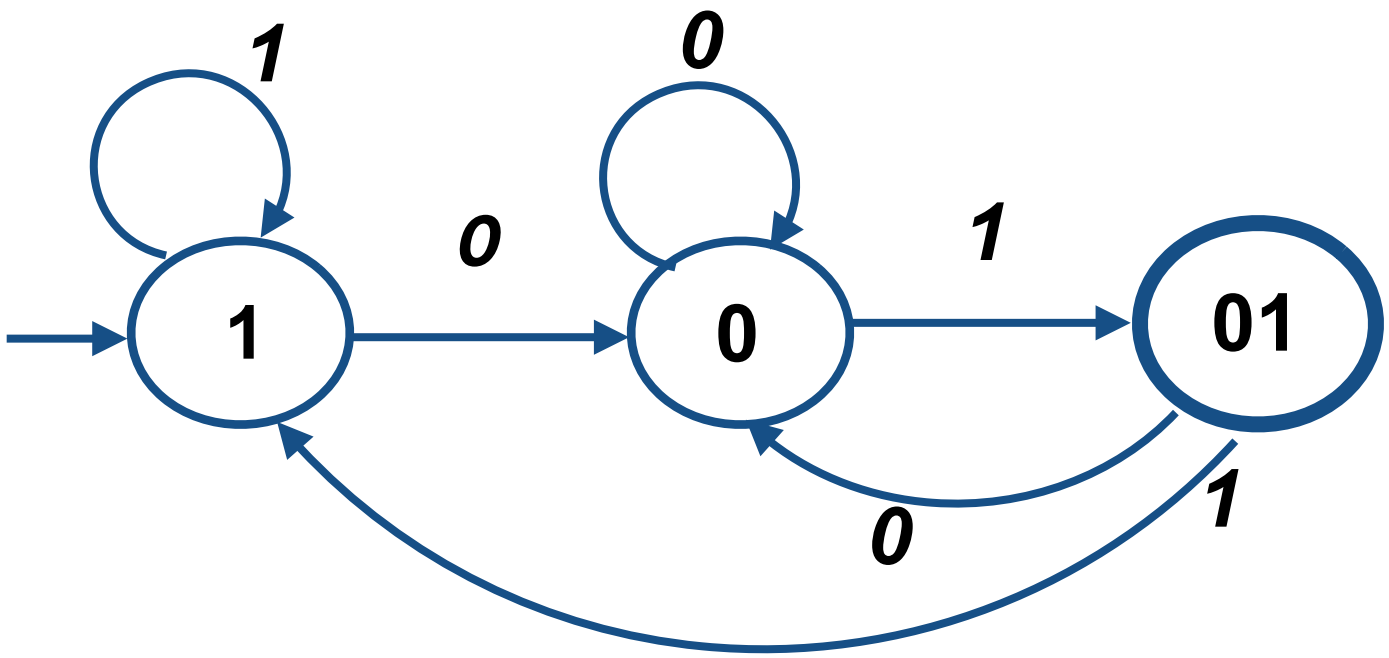


- **uno stato finale q è denotato**



Esempio 1

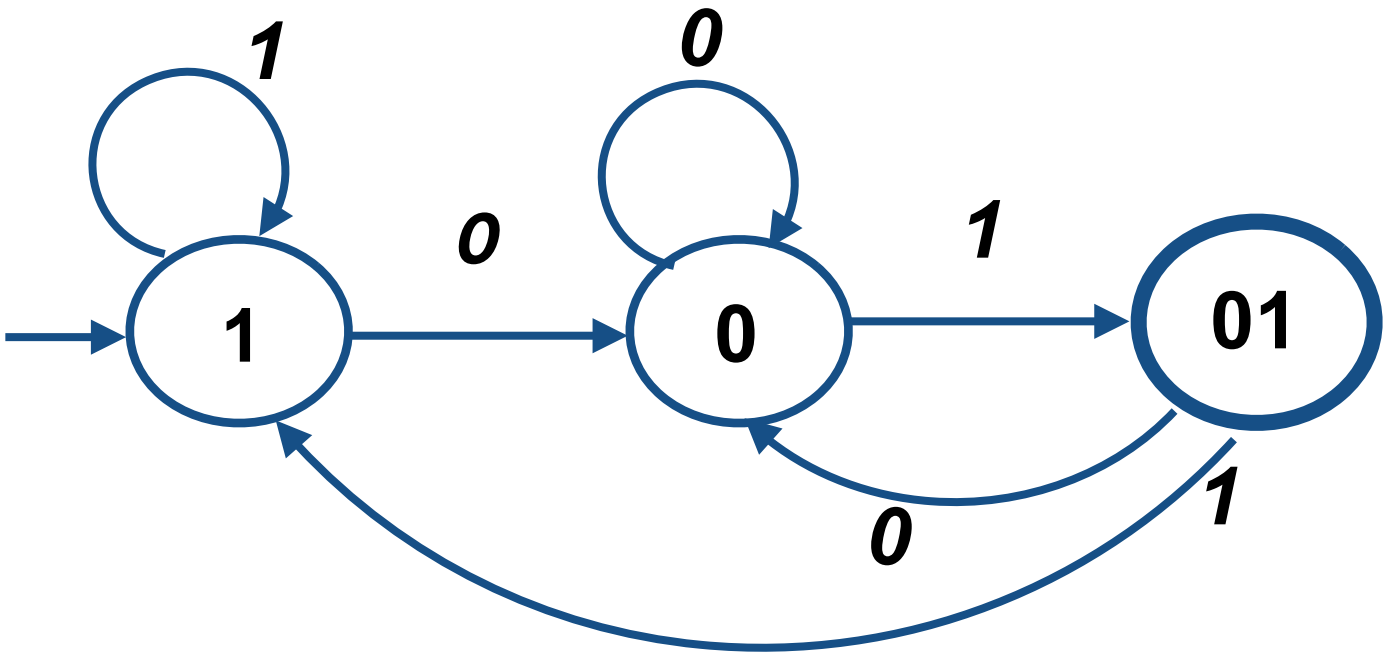
Vogliamo costruire un DFA che accetta tutte le stringhe binarie che terminano con 01



Ogni stringa che determina un cammino sul grafo diretto dallo stato iniziale a quello finale è accettata dall'automa

Esempio 1

Ogni stringa binaria w determina un cammino di lunghezza |w|+1, la lunghezza di w più 1



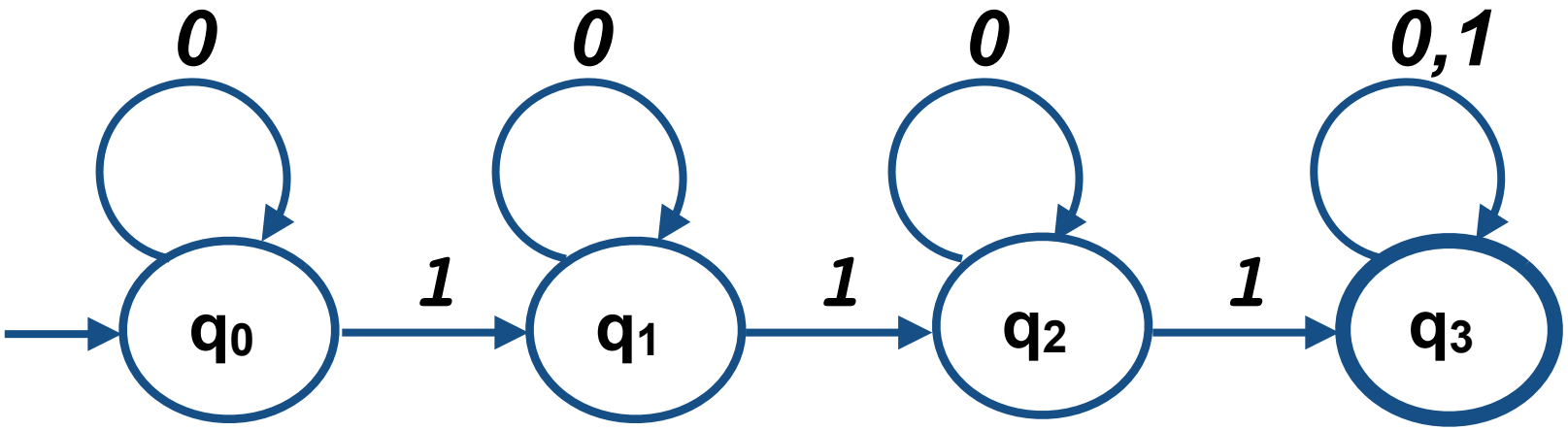
Definizione ricorsiva di lunghezza:

|ε| = 0

|wa|= |w|+1, per a in {0,1}

Esempio 2

Vogliamo costruire un DFA che accetta tutte le stringhe binarie che contengono almeno tre 1



la stringa

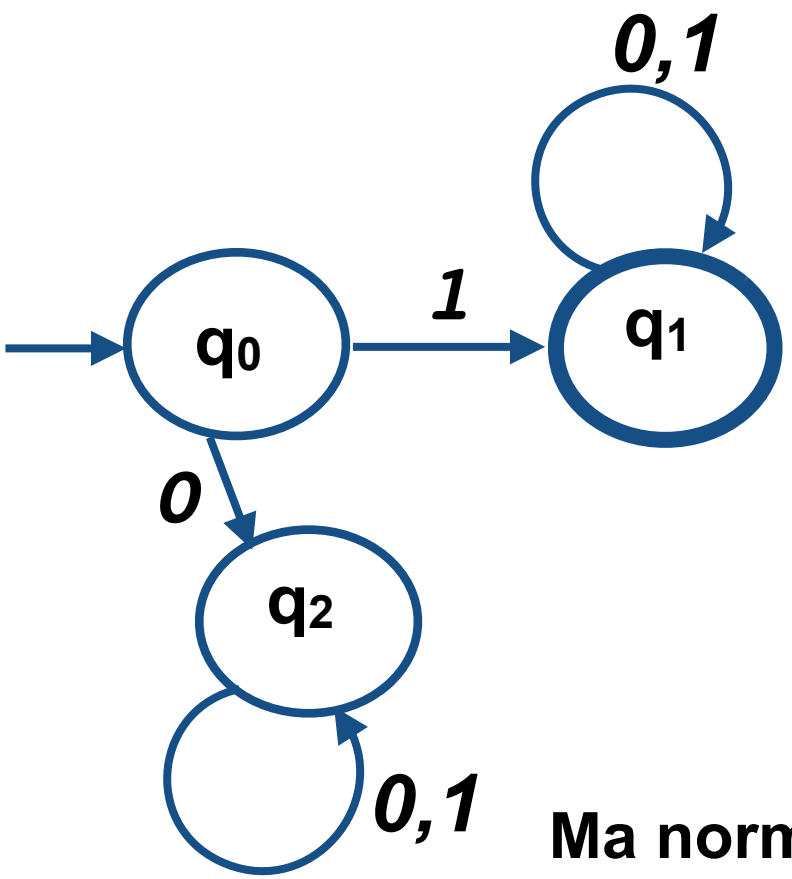
0 0 1 0 1 1 0 0 determina il cammino

q_0 q_0 q_0 q_1 q_1 q_2 q_3 q_3 q_3

Ci sono tanti archi uscenti da ogni nodo quante sono le lettere dell'alfabeto

Esempio 3

Vogliamo costruire un DFA che accetta tutte le stringhe binarie che cominciano per 1



E la parola 010?

Così manteniamo la proprietà che ogni nodo ha tanti archi uscenti quanti sono gli elementi dell'alfabeto e di conseguenza quella per cui ogni parola determina un cammino sul grafo, proprietà comoda nelle costruzioni

Ma normalmente non si disegna questa parte dell'automa

Modello formale

Un automa a stati finiti deterministico, in breve DFA (Deterministic Finite Automaton), è una quintupla

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ dove

- **Q è l' insieme finito degli stati;**
- **Σ è l' insieme finito dei simboli di input;**
- **$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ è la funzione (totale) di transizione;**
- **q_0 è lo stato iniziale;**
- **$F \subseteq Q$ è l' insieme degli stati finali o di accettazione**

CONFIGURAZIONI

Lo stato di una macchina descrive la condizione in cui si trova il controllo a stati finiti, la configurazione descrive anche lo stato dei dispositivi input e, se presenti, delle memorie aggiuntive.

Una configurazione di un DFA $M = (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ indica lo stato in cui si trova la macchina e la porzione di input ancora da leggere, è quindi un elemento di $Q \times \Sigma^*$.

Per un input $x \in \Sigma^*$, la configurazione iniziale o di partenza è (q_0,x).

Descrizione calcolo via configurazioni

La relazione "porta a" (in un passo) $\Rightarrow_M$ è una relazione binaria su $Q \times \Sigma^*$, così definita:

$$(p,ax) \Rightarrow_M (q,x) \quad \text{se e solo se } \delta(p,a) = q$$

dove $p,q \in Q$, $a \in \Sigma$ e $x \in \Sigma^*$.

Esempio

δ	*0*	*1*
q_0	q_2	q_1
q_1	q_1	q_1
q_2	q_2	q_2

$$(q_0,101) \Rightarrow_M (q_1,01)$$

Tutto il calcolo su *101* è descritto come segue:

$$(q_0,101) \Rightarrow_M (q_1,01) \Rightarrow_M (q_1,1) \Rightarrow_M (q_1,\varepsilon)$$

Chiusura riflessiva e transitiva di una relazione binaria

Data una relazione binaria R su X, cioè $R \subseteq X^2$, la chiusura riflessiva e transitiva di R si ottiene semplicemente aggiungendo a R quello che manca perché sia riflessiva e transitiva, quindi:

$R^* = R \cup$

{(x,x) | x è in X} (per la riflessività) $\cup$

{(x,z) | $\exists$ y (x,y) e (y,z) sono in R} (per la transitività)

Esempio: X = {a,b,ab,ba}, R= {(a,ab),(ab,ba)},

$R^* = R \cup$ {(a,a),(b,b),(ab,ab),(ba,ba)} $\cup$ {(a,ba)}

Il caso della "porta a"

Nel caso di nostro interesse X è l'insieme delle configurazioni $Q \times \Sigma^*$ e R è la relazione "porta a", $\Rightarrow_M$, e la chiusura riflessiva e transitiva consente di evitare di descrivere il calcolo nel dettaglio degli stati intermedi.

La riflessività esprime il fatto che senza leggere un input la macchina non cambia stato:

$$(q,x) \Rightarrow_{M^*} (q,x) \text{ , per ogni } q \in Q \text{ e } x \in \Sigma^*$$

la transitività consente di esprimere succintamente due o più passi di calcolo:

se $(p,aby) \Rightarrow_M (q,by)$ e $(q,by) \Rightarrow_M (r,y)$ allora $(p,aby) \Rightarrow_M^* (r,y)$.

Esempio

δ	*0*	*1*
q_0	q_2	q_1
q_1	q_1	q_1
q_2	q_2	q_2

La computazione su *10111111* è descritta succintamente come segue:

$(q_0, \mathit{10111111}) \Rightarrow_M^* (q_1, \varepsilon)$

DEFINIZIONE FORMALE DI ACCETTAZIONE - 1

Una parola $x \in \Sigma^*$ è accettata da un DFA $M = (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ se

$$(q_0,x) \Rightarrow_M^* (q,\varepsilon) \text{ e } q \in F.$$

Il linguaggio L(M) accettato dal DFA M è l'insieme di tutte le parole accettate da M:

$$L(M)= \{x \in \Sigma^* \mid (q_0,x) \Rightarrow_M^* (q,\varepsilon) \text{ e } q \in F \}$$

FUNZIONE DI TRANSIZIONE ESTESA

Per indicare lo stato raggiunto a partire dallo stato iniziale su un input qualsiasi introduciamo l'estensione della funzione di transizione alle parole sull'alfabeto input:

$$\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$$

così definita

se $|x| = 0$, allora $\delta^*(q,x) = q$.

se $|x| > 0$, allora $x = ya$, dove $y \in \Sigma^*$ e $a \in \Sigma$, allora $\delta^*(q,x) = \delta(\delta^*(q,y),a)$.

Nota che $\delta^*(q,a) = \delta(q,a)$ per ogni $a \in \Sigma$.

DEFINIZIONE FORMALE DI ACCETTAZIONE - 2

Una parola $x \in \Sigma^*$ è accettata da un DFA $M = (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ se

$$\delta^*(q_0,x) = r \in F.$$

Il linguaggio L(M) accettato dal DFA M è l'insieme di tutte le parole accettate da M:

$$L(M)= \{x \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0,x) \in F\}$$

LINGUAGGI REGOLARI

- $\mathcal{L}$(DFA) sia la classe dei linguaggi **accettati** da un DFA, formalmente

- $\mathcal{L}(DFA) = \{L \mid \exists\ M \in DFA \text{ e } L(M) = L\}$

Esempio 3

Si costruisca un DFA che accetta le stringhe binarie, in cui ogni "blocco" di soli 1 ha lunghezza dispari, cioè sotto parole di soli 1 circondate da 0 o terminali