Automi a stati finiti

- **Definizioni preliminari**
- **Il modello: la definizione formale, esempi.**
- **Le definizioni utili per descrivere e provare proprietà degli automi: diagramma degli stati, configurazioni, relazione “porta a” e relative definizioni di linguaggio accettato.**
- **Prime proprietà degli automi a stati finiti.**

Convenzioni

$\Sigma = \{a,b,c\}$ è un esempio di alfabeto, che è semplicemente un insieme finito. Usiamo le prime lettere dell'alfabeto per indicare gli elementi di un alfabeto, in genere.

x = *abbaacba* è un esempio di parola, che è semplicemente una sequenza di lettere dell'alfabeto. Usiamo le ultime lettere dell'alfabeto per indicare le parole su un alfabeto, in genere.

ε (o λ) è la parola vuota, senza lettere

$\Sigma^* = \{\varepsilon,a,b,c,aa,ab,ac,ba,bb,bc,\ldots\}$ è l'insieme di tutte le parole che si possono costruire sull'alfabeto $\{a,b,c\}$

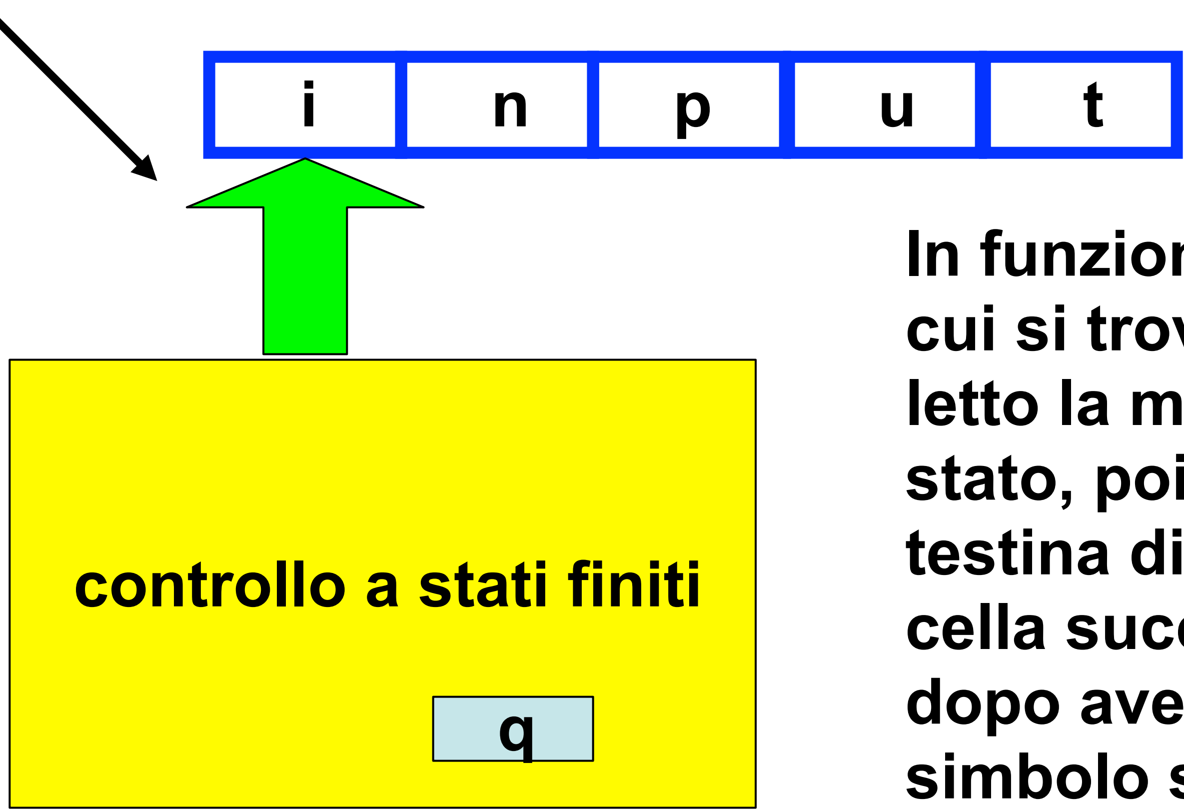
Automi a stati finiti

Hanno applicazioni in

- **verifica dei circuiti digitali e dei protocolli,**
- **compilatori,**
- **pattern recognition,**
- **etc.**

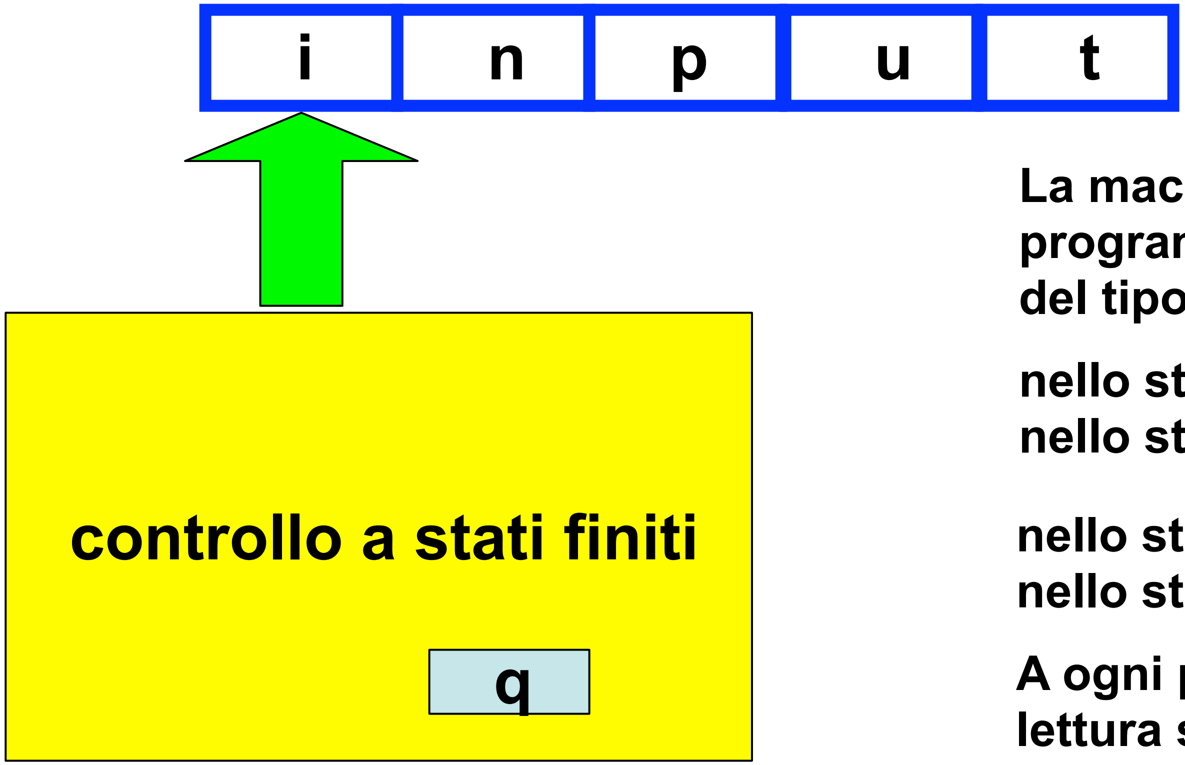
Il MODELLO MENTALE

testina di lettura,
può muoversi
solo verso destra



In funzione dello stato in cui si trova e dell’input letto la macchina cambia stato, poi sposta la testina di lettura sulla cella successiva. Termina dopo aver letto l’ultimo simbolo sul nastro input; lo stato raggiunto determina se la parola è accettata o no.

Un esempio di esecuzione



La macchina incorpora un programma con istruzioni del tipo:

nello stato q se leggi i vai nello stato p

nello stato p se leggi n vai nello stato q ...

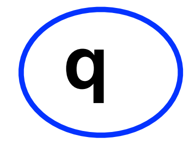
A ogni passo la testina di lettura si sposta di una cella a destra.

La macchina si ferma quando ha letto tutto l'input.

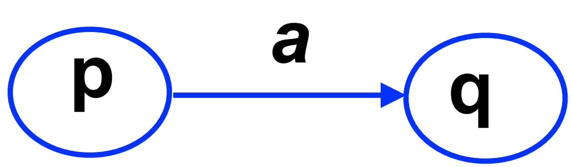
DIAGRAMMA DEGLI STATI

È un grafo diretto in cui

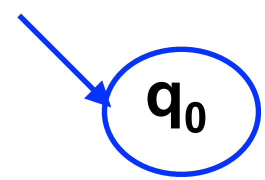
- **ogni nodo corrisponde a uno stato**



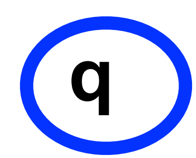
- **tra una coppia di nodi corrispondenti agli stati p e q c'è un arco con etichetta a se c'è la regola nello stato p se leggi *a* vai nello stato q**



- **lo stato iniziale q_0 è denotato**

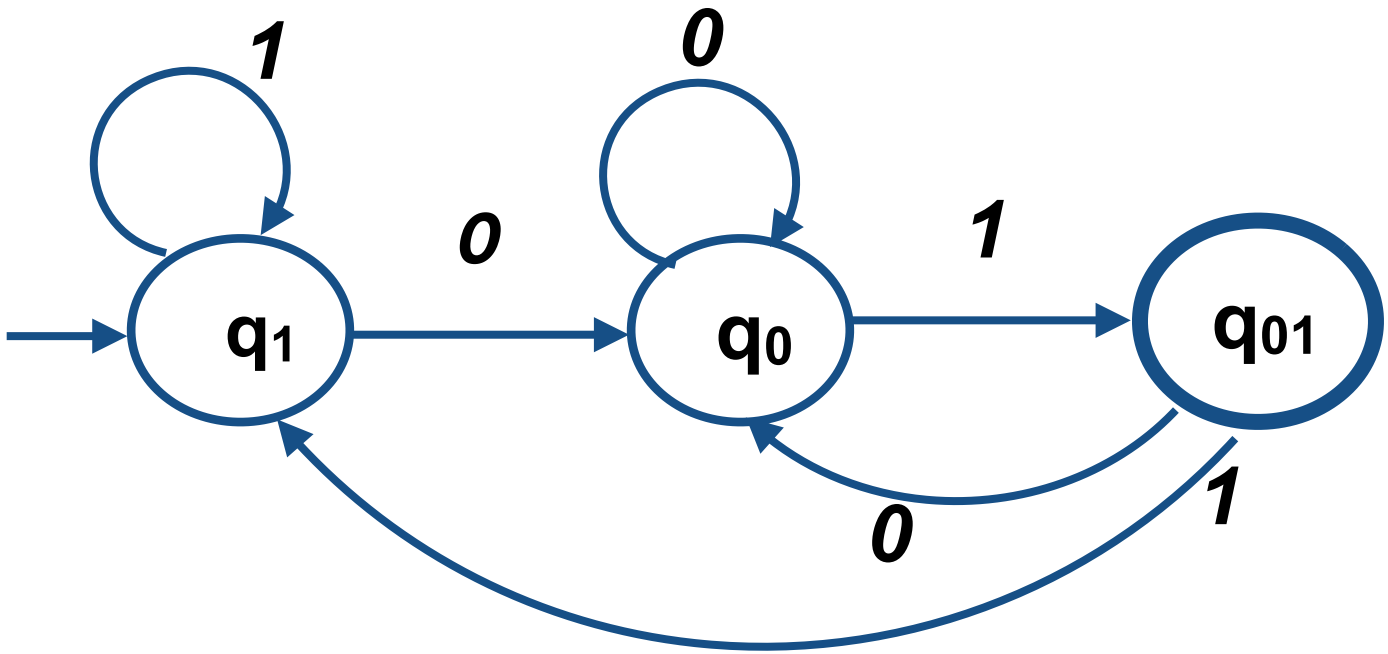


- **uno stato finale q è denotato**



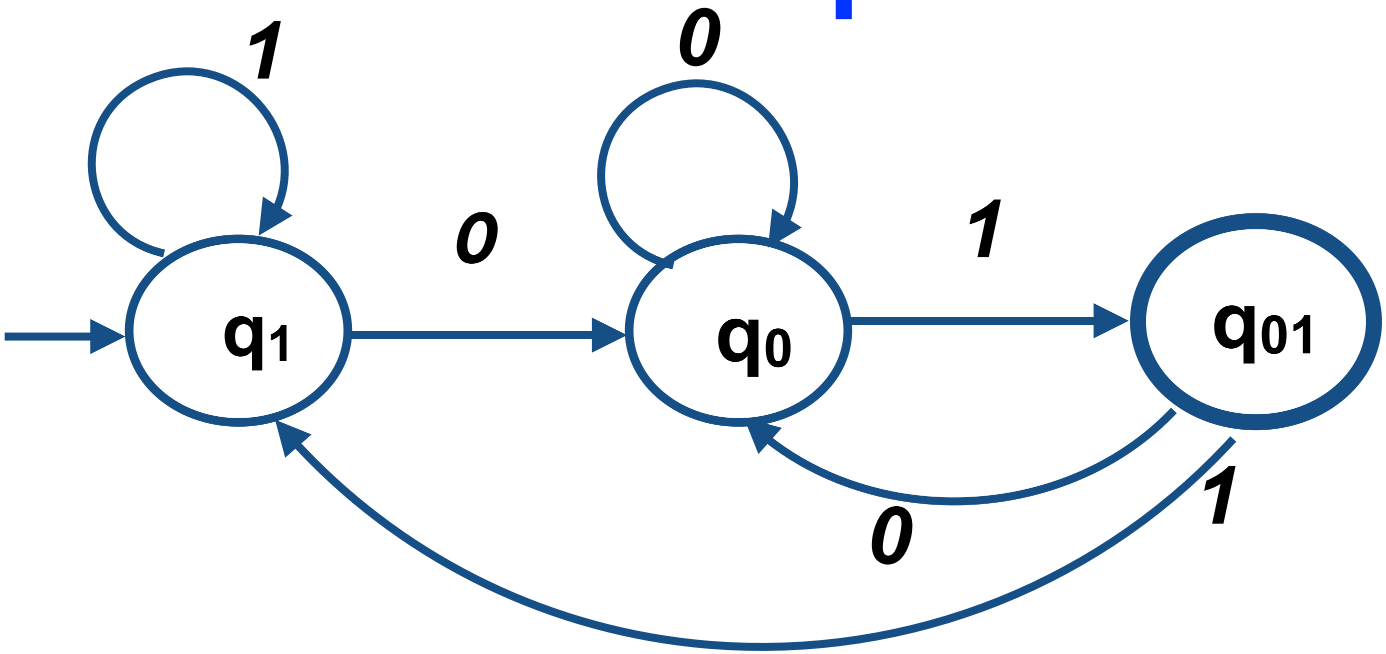
Esempio 1

Vogliamo costruire un DFA che accetta tutte le stringhe binarie che terminano con 01



Ogni stringa che determina un cammino sul grafo diretto dallo stato iniziale a quello finale è accettata dall'automa

Esempio 1



Ogni stringa binaria w determina un cammino sul grafo di lunghezza |w|+1, la lunghezza di w più 1

Definizione ricorsiva di lunghezza:

$|\varepsilon| = 0$

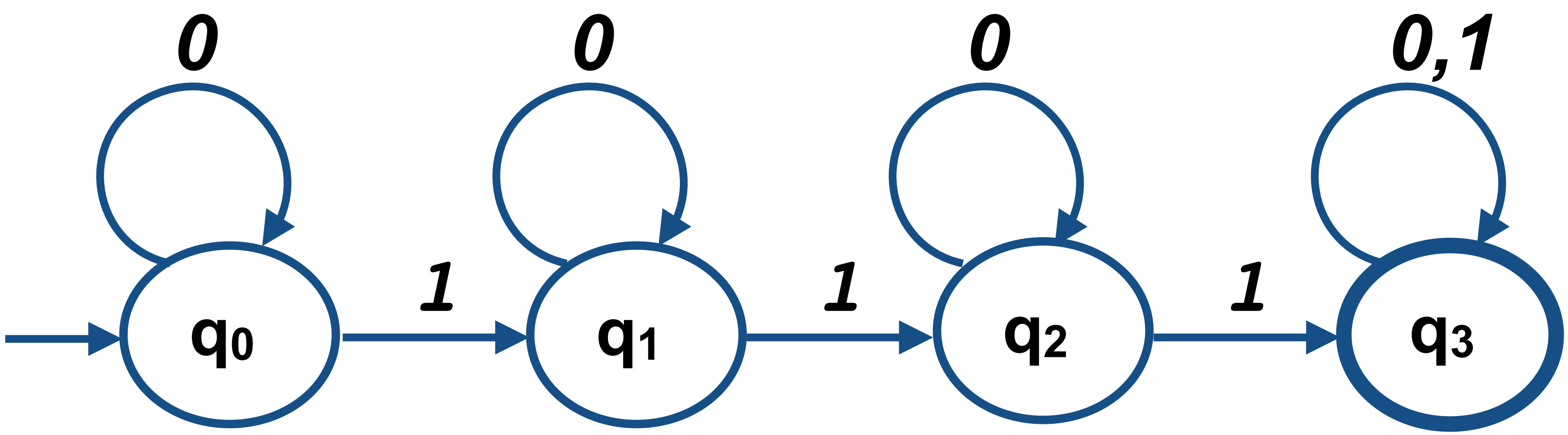
$|wa| = |w|+1$, per a in {0,1}

0 0 1 0 1 determina il cammino

q_1 q_0 q_0 q_{01} q_0 q_{01}

Esempio 2

Vogliamo costruire un DFA che accetta tutte le stringhe binarie che contengono almeno tre 1



la stringa

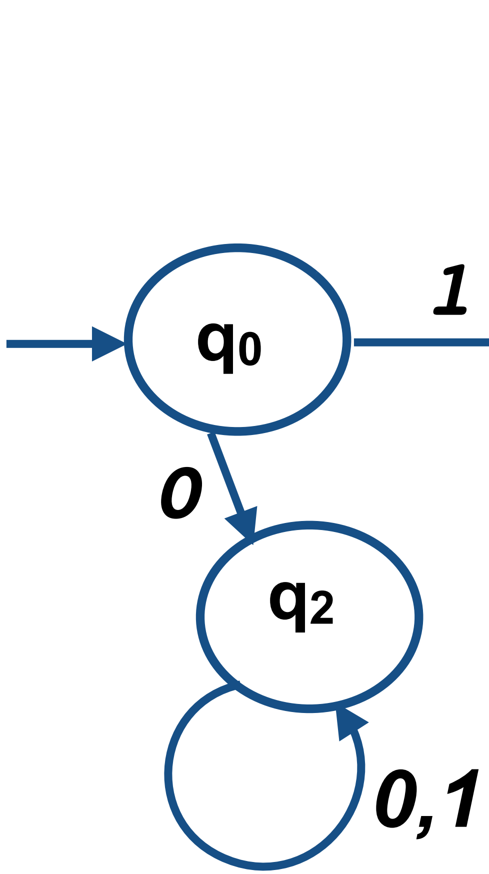
0 0 1 0 1 1 0 0 determina il cammino

q_0 q_0 q_0 q_1 q_1 q_2 q_3 q_3 q_3

Ci sono tanti archi uscenti da ogni nodo quante sono le lettere dell'alfabeto

Esempio 3

Vogliamo costruire un DFA che accetta tutte le stringhe binarie che cominciano per 1



E la parola 010?

Così manteniamo la proprietà che ogni nodo ha tanti archi uscenti quanti sono gli elementi dell'alfabeto e di conseguenza quella per cui ogni parola determina un cammino sul grafo, proprietà comoda nelle costruzioni

Ma normalmente non si disegna questa parte dell'automa

Modello formale

Un automa a stati finiti deterministico, in breve DFA (Deterministic Finite Automaton), è una quintupla

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ dove

- **Q è l' insieme finito degli stati;**
- **Σ è l' insieme finito dei simboli di input;**
- **$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ è la funzione (totale) di transizione;**
- **q_0 è lo stato iniziale;**
- **$F \subseteq Q$ è l' insieme degli stati finali o di accettazione**

CONFIGURAZIONI

Lo stato di una macchina descrive la condizione in cui si trova il controllo a stati finiti, la configurazione descrive anche lo stato dei dispositivi input e, se presenti, delle memorie aggiuntive.

Una configurazione di un DFA $M = (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ indica lo stato in cui si trova la macchina e la porzione di input ancora da leggere, è quindi un elemento di $Q \times \Sigma^*$.

Per un input $x \in \Sigma^*$, la configurazione iniziale o di partenza è (q_0,x).

Descrizione calcolo via configurazioni

La relazione "porta a" (in un passo) $\Rightarrow_M$ è una relazione binaria su $Q \times \Sigma^*$, così definita:

$$(p, ax) \Rightarrow_M (q, x) \quad \text{se e solo se } \delta(p, a) = q$$

dove $p, q \in Q$, $a \in \Sigma$ e $x \in \Sigma^*$.

Esempio

δ	*0*	*1*
q_0	q_2	q_1
q_1	q_1	q_1
q_2	q_2	q_2

$$(q_0, 101) \Rightarrow_M (q_1, 01)$$

Tutto il calcolo su *101* è descritto come segue:

$$(q_0, 101) \Rightarrow_M (q_1, 01) \Rightarrow_M (q_1, 1) \Rightarrow_M (q_1, \varepsilon)$$

Chiusura riflessiva e transitiva di una relazione binaria

Data una relazione binaria R su X, cioè $R \subseteq X^2$, la chiusura riflessiva e transitiva di R si ottiene semplicemente aggiungendo a R quello che manca perché sia riflessiva e transitiva, quindi:

$R^* = R \cup$

$\{(x,x) \mid x$ è in $X\}$ (per la riflessività) $\cup$

$\{(x,z) \mid \exists\, y\ (x,y)$ e (y,z) sono in $R\}$ (per la transitività)

Esempio: $X = \{a,b,ab,ba\}$, $R= \{(a,ab),(ab,ba)\}$,

$R^* = R \cup \{(a,a),(b,b),(ab,ab),(ba,ba)\} \cup \{(a,ba)\}$

Il caso della “porta a”

Nel caso di nostro interesse X è l’insieme delle configurazioni $Q \times \Sigma^*$ e R è la relazione “porta a”, $\Rightarrow_M$, e la chiusura riflessiva e transitiva consente di evitare di descrivere il calcolo nel dettaglio degli stati intermedi.

La riflessività esprime il fatto che senza leggere un input la macchina non cambia stato:

$$(q,x) \Rightarrow_{M^*} (q,x) \text{ , per ogni } q \in Q \text{ e } x \in \Sigma^*$$

la transitività consente di esprimere succintamente due o più passi di calcolo:

se $(p,aby) \Rightarrow_M (q,by)$ **e** $(q,by) \Rightarrow_M (r,y)$ **allora** $(p,aby) \Rightarrow_M^* (r,y)$.

Esempio

δ	*0*	*1*
q_0	q_2	q_1
q_1	q_1	q_1
q_2	q_2	q_2

La computazione su *10111111* è descritta succintamente come segue:

$(q_0, \mathbf{10111111}) \Rightarrow_M^* (q_1, \varepsilon)$

DEFINIZIONE FORMALE DI ACCETTAZIONE - 1

Una parola $x \in \Sigma^*$ è accettata da un DFA $M = (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ se

$$(q_0,x) \Rightarrow_M^* (q,\varepsilon) \text{ e } q \in F.$$

Il linguaggio L(M) accettato dal DFA M è l'insieme di tutte le parole accettate da M:

$$L(M)= \{x \in \Sigma^* \mid (q_0,x) \Rightarrow_M^* (q,\varepsilon) \text{ e } q \in F \}$$

FUNZIONE DI TRANSIZIONE ESTESA

Per indicare lo stato raggiunto a partire dallo stato iniziale su un input qualsiasi introduciamo l'estensione della funzione di transizione alle parole sull'alfabeto input:

$$\delta^* : \mathbf{Q} \times \Sigma^* \rightarrow \mathbf{Q}$$

così definita

se $|\mathbf{x}| = 0$, allora $\delta^*(\mathbf{q},\mathbf{x}) = \mathbf{q}$.

se $|\mathbf{x}| > 0$, allora $\mathbf{x}=\mathbf{y}a$, dove $\mathbf{y} \in \Sigma^*$ e $a \in \Sigma$,

allora $\delta^*(\mathbf{q},\mathbf{x}) = \delta(\delta^*(\mathbf{q},\mathbf{y}),a)$.

Nota che $\delta^*(\mathbf{q},a) = \delta(\mathbf{q},a)$ per ogni $a \in \Sigma$.

DEFINIZIONE FORMALE DI ACCETTAZIONE - 2

Una parola $x \in \Sigma^*$ è accettata da un DFA $M = (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ se

$$\delta^*(q_0,x) = r \in F.$$

Il linguaggio L(M) accettato dal DFA M è l'insieme di tutte le parole accettate da M:

$$L(M)= \{x \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0,x) \in F\}$$

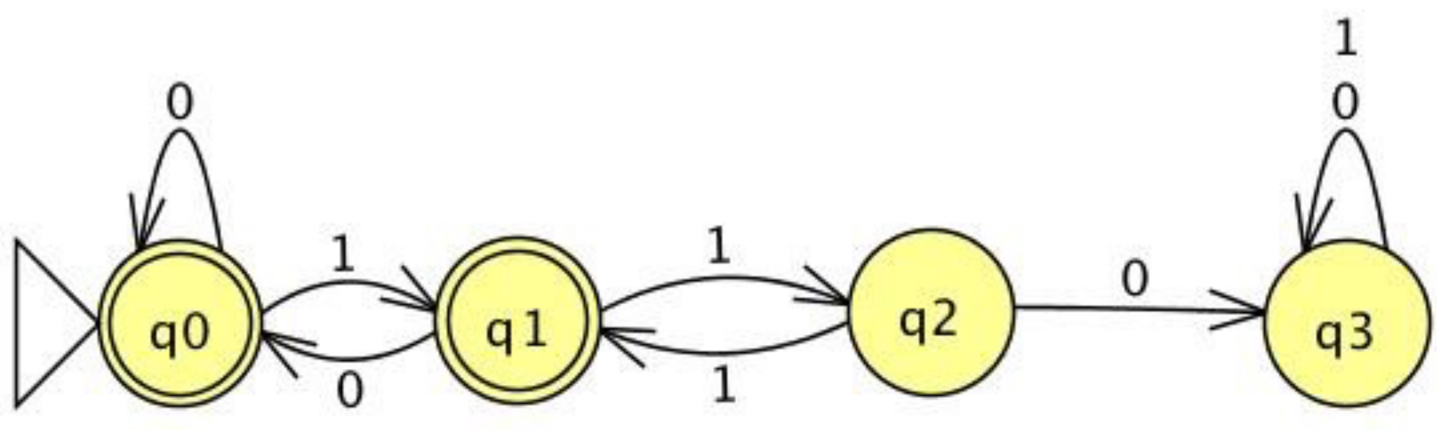
LINGUAGGI REGOLARI

$\mathcal{L}$(DFA) sia la classe dei linguaggi **accettati** da un DFA, formalmente

$$\mathcal{L}(DFA) = \{L \mid \exists\ M \in DFA \text{ e } L(M) = L\}$$

Esempio 3

Si costruisca un DFA che accetta le stringhe binarie, in cui ogni "blocco" di soli 1 ha lunghezza dispari, cioè sotto parole di soli 1 circondate da 0 o terminali



L'algoritmo che decide se un DFA accetta almeno una parola

INPUT: La codifica di M = (Q,Σ,δ,q_0,F).

Fase 1.

Costruisce il grafo G = (V,E) come segue:

1. V è l'insieme Q degli stati

2. Per ogni regola $\delta(q,a) = p$ aggiungi a E , se non è già presente, l'arco (q,p)

3. aggiungi un nuovo vertice t e gli archi (p,t), per ogni p in F

Usa l'algoritmo PATH(G,q_0,t) per verificare la presenza di un cammino tra il vertice q_0 e il vertice t in G

L'algoritmo è corretto perché si dimostra che esiste x in L(M) <u>sse</u> c'è un cammino da q_0 a t in G

Un algoritmo alternativo per decidere se DFA accetta almeno una parola

Si dimostra il seguente teorema:
Dato un DFA M con n stati L(M) ≠ ∅ sse esiste una parola di lunghezza minore o uguale a n-1 che viene accettata.
Prova.
Dimostriamo che se L(M) ≠ ∅ allora esiste una parola di lunghezza minore o uguale di n-1 che viene accettata.
Supponiamo per assurdo che tutte le parole accettate siano di lunghezza almeno n. Prendiamo una parola w tra le più corte parole di lunghezza almeno n accettate da M. Sia |w| = m. Il cammino determinato da w sul grafo di transizione, $p_0 \dots p_m$ è lungo m+1 ≥ n+1 quindi contiene almeno una ripetizione, cioè esistono i e j, con i < j, tali che $p_i = p_j$, quindi il cammino $p_0 \dots p_i p_{j+1} \dots p_m$ è più corto di m+1. La parola v che etichetta il cammino $p_0 \dots p_i p_{j+1} \dots p_m$ è più corta almeno di 1 di w ed è accettata.
Ma v non può avere lunghezza minore di quella di w, che è tra le più corte accettate e non può essere di lunghezza minore di n per ipotesi.
La contraddizione dimostra l'implicazione.
Quindi questo verso del sse è dimostrata, l'altro è banale.

L’algoritmo

L’algoritmo consiste quindi nel controllare se una delle parole di lunghezza minore o uguale a n-1 è accettata dal DFA M dato in input, dove n è il numero degli stati.
Se M accetta una di quelle parole possiamo concludere che il linguaggio non è vuoto, altrimenti concludiamo che è vuoto, in virtù del teorema precedente.

Confronto tra i due algoritmi

Il secondo algoritmo ha una complessità esponenziale in n. Poiché l'algoritmo precedente era lineare nella dimensione del grafo è evidente che questo secondo perde nel confronto. (Per esercizio analizzate più in dettaglio la complessità dei due algoritmi)

Inoltre il primo algoritmo è un esempio di <u>riduzione tra problemi</u> (il problema del non vuoto per un DFA viene ridotto al problema dell'esistenza di un cammino tra due vertici in un grafo diretto), mentre il secondo è un esempio di individuazione di un <u>sottoinsieme finito</u> dello spazio delle soluzioni, infinito, la cui esplorazione basta per risolvere il problema.