Sommario

Proprietà decidibili e indecidibili delle $\mathcal{L}$(TM).

Teorema di Rice.

Proprietà di chiusura di $\mathcal{L}$(TM).

Altre proprietà di TM

$INFIN_{TM}$

Il problema dell'infinito per le TM:
$INFIN_{TM}$ = {<M> | M è in TM e L(M) è infinito} è deciso da qualche TM?

Prova della non decidibilità:

Per riduzione da A_{TM}, $A_{TM} \leq_m INFIN_{TM}$.

Ad un input per A_{TM}, < M,w>, associamo <T> , dove T è una TM, in modo tale che w è in L(M) (< M,w> è in A_{TM}) sse L(T) è infinito (e quindi <T> è in $INFIN_{TM}$).

Adottiamo l'alfabeto binario.

La TM T è così definita:
input x
esegui M su w e
se M accetta w, accetta x
se M rifiuta w, rifiuta x.

Se M accetta w allora T accetta {0,1}*, mentre se M non accetta w allora L(T) = ∅, quindi abbiamo ottenuto la riduzione f voluta:
w è in L(M) (< M,w> è in A_{TM}) sse (f(<M,w>) = <T> è in $INFIN_{TM}$) L(T) è infinito.

La funzione di riduzione è Turing calcolabile?

La funzione di riduzione è Turing calcolabile?

La riduzione f voluta, associa ad un input per A_{TM}, < M,w>, una TM <T>, in modo tale che < M,w> è in A_{TM} sse <T> è in $INFIN_{TM}$.

La TM che calcola la funzione di riduzione prende in input <M,w> e costruisce T.
La TM T, nel suo stato iniziale, qualsiasi simbolo legga nella prima cella passa a simulare M su w e si comporta sul suo input esattamente come fa M su w. Quindi una descrizione di T è una leggera variante della descrizione di M su w.

$\text{REGULAR}_{\text{TM}}$

Data una TM M vorremmo disporre di un algoritmo che determina se il linguaggio riconosciuto da M è regolare.

Il problema in termini di linguaggi:

$\text{REGULAR}_{\text{TM}}$ = {<M> | M è in TM e L(M) è regolare} è deciso da qualche TM?

Risposta: NO

$REGULAR_{TM}$

$REGULAR_{TM}$ = {<M> | M è in TM e L(M) è regolare} è deciso da qualche TM?

Prova della non decidibilità:

Per riduzione da A_{TM}, $A_{TM} \leq_m REGULAR_{TM}$.

Ad un input per A_{TM}, < M,w>, associamo <T> , dove T è una TM, in modo tale che w è in L(M) (< M,w> è in A_{TM}) sse L(T) è regolare (e quindi <T> è in $REGULAR_{TM}$).

Adottiamo l'alfabeto binario.

Quindi le parole del tipo 0^n1^n sono accettate

La TM T è così definita:
input x
- **se $x = 0^n1^n$, per qualche $n \geq 0$, allora accetta x**
- **altrimenti(cioè se x non è di quella forma) esegui M su w e**
  - **se M accetta w, accetta x**
  - **se M rifiuta w, rifiuta x.**

se M accetta w, T accetta anche tutti gli altri possibili input

se M non accetta w, T non accetta altro

**Se M accetta w allora $L(T) = \{0,1\}^*$; che è regolare,
mentre se M non accetta w allora $L(T) = \{0^n1^n \mid n \geq 0\}$, che non è regolare, quindi abbiamo ottenuto la riduzione f voluta:
w è in L(M) (< M,w> è in A_{TM}) sse L(T) è regolare (f(<M,w>)= <T> è in $REGULAR_{TM}$).**

La funzione di riduzione è Turing calcolabile?

Ad un input per A_{TM}, < M,w>, associamo <T> , dove T è una TM, in modo tale che w è in L(M) (< M,w> è in A_{TM}) sse L(T) è regolare (e quindi <T> è in $REGULAR_{TM}$).

La TM che calcola la riduzione riceve in input <M,w> e produce la TM T che, nel suo stato iniziale, leggendo il primo simbolo in input,
esegue la TM che controlla se $x = 0^n1^n$, per qualche $n \geq 0$, e se la risposta è sì accetta. Se invece la risposta è no, e quindi l'input non è della forma $x = 0^n1^n$, per qualche $n \geq 0$, manda in esecuzione M su w e accetta x se M accetta w.
Se M non accetta w T rifiuta x.
Quindi anche in questo caso è possibile costruire una TM che produce la descrizione di T a partire da quella di M e w.

Verso il teorema di Rice

Queste due prove sono molto simili, la TM T associata all'istanza <M,w> di A_{TM} nella riduzione utilizza la TM M dell'istanza e decide cosa fare sul suo input x dopo e in conseguenza di quello che fa M sul suo input w in un caso e nell'altro prima esegue qualche controllo sul suo input e poi invoca la TM M sul suo input w

$A_{TM} \leq_m INFIN_{TM}$
f(< M,w>)= <T>
w è in L(M) sse L(T) è infinito
dopo

La TM T è così definita:
input x
esegui M su w e
se M accetta w, accetta x
se M rifiuta w, rifiuta x.

$A_{TM} \leq_m REGULAR_{TM}$
f(< M,w>)=<T>
w è in L(M) sse L(T) è regolare
prima

La TM T è così definita:
input x
se $x = 0^n1^n$, per qualche $n \geq 0$, allora accetta
altrimenti esegui M su w e
se M accetta w, accetta
se M rifiuta w, rifiuta.

Rice ha dimostrato che ogni proprietà non banale (cioè che non sia sempre vera o sempre falsa) per una TM è indecidibile, sfruttando proprio la riduzione da A_{TM}.

Teorema di Rice: enunciati

Teorema di RICE (enunciato Sipser). Sia P un problema sulle TM tale che

se 1 e 2 sono vere allora P è indecidibile, dove:

1. se T1 e T2 sono TM equivalenti, cioè tali che L(T1)=L(T2), allora T1 è in P sse T2 è in P (T1 e T2 sono entrambe istanze sì di P o entrambe istanze no)

(la proprietà riguarda il linguaggio e non la TM che lo riconosce)

2. ci sono due TM T1 e T2 tali che T1 è in P e T2 non è in P.

(P non è banale, cioè non esprime una proprietà falsa per tutte le TM o vera per tutte le TM)

Teorema di RICE (enunciato Trevisan). Sia C una classe di linguaggi e consideriamo M_C ={<M> | L(M) è in C}. Allora M_C è vuoto o contiene le descrizioni di tutte le TM o è indecidibile.

Teorema di Rice: prova

Teorema di RICE. Sia C una classe di linguaggi e consideriamo $M_C = \{<M> \mid L(M) \text{ è in } C\}$. Allora M_C è vuoto o contiene le descrizioni di tutte le TM o è indecidibile.

Prova. Supponiamo che C sia una classe di linguaggi non vuota e che non contenga tutti i linguaggi. Supponiamo anche che $\emptyset \notin C$, altrimenti potremmo ragionare sul complemento di C. Dimostreremo l'indecidibilità di M_C per riduzione da A_{TM}, $A_{TM} \leq_m M_C$.

A un input per A_{TM}, $< M,w>$, associamo $<T>$, una codifica di una TM T, tale che $< M,w> \in A_{TM}$ sse $<T> \in M_C$.

Sia V una TM tale che $<V> \in M_C$. Sappiamo che $L(V) \neq \emptyset$ e costruiamo T in modo tale che sia equivalente a V se w è in L(M) altrimenti che riconosca il linguaggio vuoto, infatti in tal caso non è in M_C.

T:
sull'input x
esegui M su w e
- se M accetta, allora esegui V su x e
  - se V accetta x, accetta, se V rifiuta x, rifiuta
- se M rifiuta, rifiuta.

Se M accetta w allora $L(T) = L(V)$, cioè T accetta lo stesso linguaggio di V, e quindi $<T> \in M_C$; mentre
se M non accetta w allora $L(T) = \emptyset$, e quindi $<T> \notin M_C$.
Dunque abbiamo ottenuto la riduzione f voluta:
$<M,w>$ è in A_{TM} sse $f(<M,w>)=<T> \in M_C$

Proprietà di chiusura - 1

Teorema. $\mathcal{L}$(TM) è chiusa rispetto a unione e intersezione.

Prova. Dati due linguaggi L1 ed L2 in $\mathcal{L}$(TM), facciamo vedere che anche L1$\cup$ L2 e L1$\cap$ L2 sono Turing riconoscibili.

TM per l' Unione:
sull'input x
esegui T1 e T2 in parallelo,
se una delle due accetta x,
accetta
se entrambe rifiutano x,
rifiuta

TM per l' Intersezione:
sull'input x
esegui T1
se T1 rifiuta x, rifiuta
se T1 accetta x, esegui T2
se T2 accetta x, accetta
se T2 rifiuta x, rifiuta

Proprietà di chiusura - 2

E il complemento?

Teorema. La classe dei linguaggi decidibili è chiusa rispetto al complemento.

Prova. Sia T una TM che accetta L. Costruiamo una TM che accetta il complemento.

TM per il complemento:
sull'input x
esegui la TM T
se T accetta rifiuta
altrimenti accetta

T si ferma sempre!

Catalogo proprietà TM

Sulle TM possiamo considerare tre tipi di proprietà:

quelle che riguardano i linguaggi accettati. Queste sono quelle che molto facilmente sono indecidibili in base al teorema di Rice. (Esempi sono: il problema del vuoto, dell'infinito, la regolarità...)

quelle che riguardano la struttura della TM, per esempio "la TM T ha tot stati". Queste proprietà son banalmente decidibili esaminando la codifica della TM in input.

quelle che riguardano il comportamento della TM, per es. "la TM T non muove mai a sinistra, sull'input 00111". Queste proprietà possono essere decidibili o no e non sempre è facile prevederlo.

Una proprietà di comportamento decidibile

Consideriamo
L_R = { <M> | M non fa alcuna mossa a sinistra sull'input 00111}

Il linguaggio L_R è decidibile

La TM T seguente decide L_R

input <M>
esegui M su x = 00111 per |Q| + |x| +1 mosse

se durante queste mosse M ha eseguito una mossa a sinistra, rifiuta
altrimenti (è sempre andata a destra)
se si è fermata o
lavorando sulla porzione vuota del nastro è tornata in uno stato
nel quale era già entrata in precedenza (quindi cicla indefinitamente)
allora accetta

E' evidente che possiamo sostituire 00111 con una qualsiasi altra stringa.

Una proprietà di comportamento indecidibile

Dato un simbolo x, diverso da quello di cella vuota, consideriamo
L_x = { <M> | M scrive x, in un qualche momento dopo essere partita sul nastro vuoto}

Per riduzione da A_{TM}, $A_{TM} \leq_m L_x$.

Ad un input per A_{TM}, < M,w>, associamo <T> , dove T è una TM, in modo tale che w è in L(M) sse T scrive x sul suo input, e quindi anche quando parte sul nastro vuoto (cioè <T> è in L_x).

Adottiamo l'alfabeto binario.
La TM T è così definita:
input y
sostituisci nella descrizione di M e di w ogni occorrenza di x con X, creando così le versioni M' e w' di M e rispettivamente di w
esegui M' su w' e
se M' accetta w', scrivi x sul nastro e accetta
se M' rifiuta w', rifiuta.

E' evidente che se M accetta w allora T scriverà x sul nastro
mentre se M non accetta w allora T non può scrivere x sul nastro.
w è in L(M) sse T scrive x, in un qualche momento dopo essere partita su un qualsiasi input, quindi anche sul nastro vuoto.

Non Turing riconoscibilità

Il problema dell'equivalenza per TM:

EQ_{TM} = {<M,M'> | M,M' sono TM e L(M)=L(M')} non è Turing riconoscibile.

Osservazione 1: **se $A \leq_m B \Leftrightarrow \neg A \leq_m \neg B$**

Osservazione 2: **A_{TM} è Turing riconoscibile mentre $\neg A_{TM}$ non lo è.**

Osservazione 3: **Per provare che un qualsiasi problema B non è Turing riconoscibile dovremmo dimostrare $\neg A_{TM} \leq_m B$, ma la TM nell'istanza del problema dell'appartenenza potrebbe non fermarsi, quindi conviene sfruttare l'osservazione 1 e ridurre A_{TM} al complemento di B, cioè dimostrare che $A_{TM} \leq_m \neg B$.**

Equivalenza: EQ_{TM}

EQ_{TM} = {<M,M'> | M,M' sono TM e L(M)=L(M')} non è Turing riconoscibile.

Prova della non Turing riconoscibilità:

Riduciamo A_{TM} all'inequivalenza, cioè al complemento dell'equivalenza per TM:

$$A_{TM} \leq_m \neg EQ_{TM}.$$

Ad un input per A_{TM}, <M,w>, associamo <T1,T2>, la codifica di due TM T1 e T2, in modo tale che w è in L(M) sse L(T1)≠L(T2). Sempre sull'alfabeto binario.

La TM T1 è così definita:
input x
rifiuta

L(T1)= ∅

La TM T2 è così definita:
input x
esegui M su w
se M accetta w, accetta x
se M rifiuta w , rifiuta x.

Se w è in L(M) allora L(T2) ={0,1}*
mentre se w non è in L(M) allora L(T2) = ∅

quindi abbiamo ottenuto la riduzione voluta:
w è in L(M) sse L(T1)≠L(T2).

La funzione di riduzione è Turing calcolabile?

L'inequivalenza: $\neg Q_{TM}$

$\neg EQ_{TM}$ = {<M,M'> | M,M' sono TM e L(M)≠L(M')} è decidibile? **NO!**

Turing riconoscibile? **NO!**

Riduciamo A_{TM} al complemento dell'inequivalenza per TM, cioè all'equivalenza: $A_{TM} \leq_m EQ_{TM}$.

Ad un input per A_{TM}, <M,w>, associamo <T1,T2> la codifica di due TM T1e T2 tali che w è in L(M) sse L(T1)=L(T2). Sempre sull'alfabeto binario.

La TM T1 è così definita:
input x
accetta

L(T1)= {0,1}*

La TM T2 è così definita:
input x
esegui M su w
se M accetta w accetta x
se M rifiuta, rifiuta x.

Se w è in L(M) allora L(T2) = {0,1}*
mentre se w non è in L(M) allora L(T2) = ∅

quindi abbiamo ottenuto la riduzione voluta: w è in L(M) sse L(T1)=L(T2).

Es. riduzioni

Es.1 Se A $\leq_m$ B e B è regolare, possiamo concludere che A è regolare?

Risposta: NO.

Supponiamo che A e B siano sull'alfabeto binario.
Osserviamo che, dalla definizione di riduzione, segue che se A $\leq_m$ B allora esisteuna funzione f : $\{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$ tale che x è in A sse f(x) è in B.

Sia A = $\{0^n1^n$, per $n \geq 0\}$ e B = {1}, sia inoltre $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \text{ è in } A \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$

f definisce una riduzione e poichè B è finito, è regolare mentre A no.

Es. riduzioni

Es. 3. Se A $\leq_m \neg$A e A è Turing riconoscibile, allora A è decidibile

Es. Turing riconoscibilità

Es. 4. Si dimostri che $\neg E_{TM}$ è Turing riconoscibile .

Descrizione della TM T che Turing riconosce $\neg E_{TM}$
input <M>
1. inizializza un contatore m a 1
2. esegui m passi di M sulle parole x con $|x| \leq m$
se M accetta una di queste parole, accetta
altrimenti, incrementa m e torna al punto 2

Se L(M) è vuoto la TM T non si ferma, mentre se L(M) non è vuoto la TM T trova la prima parola accettata da M e si ferma accettando.

Es. riduzioni

Si dimostri che A_{TM} non è riducibile a E_{TM}.

Supponiamo che lo sia allora $A_{TM} \leq_m E_{TM}$ e quindi $\neg A_{TM} \leq_m \neg E_{TM}$ ma $\neg A_{TM}$ non è Turing riconoscibile mentre $\neg E_{TM}$ sì.