

# Sommario

**Introduzione, definizioni ed esempi  
di grammatiche acontestuali  
(context-free)**

# SINTASSI ESPRESSIONI ARITMETICHE (semplificate)

$E \rightarrow E+E$

$E \rightarrow E * E$

$E \rightarrow (E)$

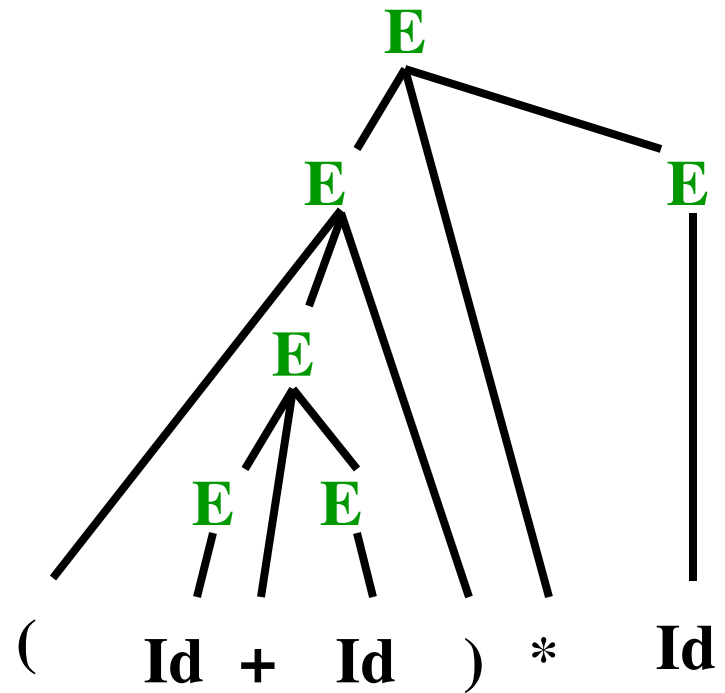
$E \rightarrow \text{Id}$

Esempio di derivazione:

$E \Rightarrow E * E \Rightarrow (E) * E \Rightarrow (E) * \text{Id}$

$\Rightarrow (E+E) * \text{Id} \Rightarrow (\text{Id}+E) * \text{Id}$

$\Rightarrow (\text{Id}+\text{Id}) * \text{Id}$



# SINTASSI identificatori in PYTHON

(da <https://www.python.org>)

**identifier ::= (letter | “\_”) (letter | digit | “\_”)\***

**letter ::= lowercase | uppercase**

**lowercase ::= “a” | ... | “z”**

**uppercase ::= “A” | ... | “Z”**

**digit ::= “0” | ... | “9”**

**Letto come CFG:**

**id → letter id1 | \_ id1**

**id1 → ε | letter | digit | letter id1 | digit id1 | \_ id1**

**il resto non cambia**

# SINTASSI identificatori in PYTHON

(da <https://www.python.org>)

**id** → letter id1 | \_ id1

**id1** → ε | letter | digit | letter id1 | digit id1 | \_ id1

**letter** → lowercase | uppercase

**lowercase** → a | ... | z

**uppercase** → A | ... | Z

**digit** → 0 | ... | 9

**Esempio di derivazione:**

**id** ⇒ letter id1 ⇒ a id1 ⇒ a letter id1

⇒ a b id1 ⇒ ab\_id1 ⇒ ab\_ letter id1 ⇒ ab\_ c id1

⇒ ab\_ c digit id1 ⇒ ab\_ c9 id1 ⇒ ab\_ c9

# SINTASSI PYTHON (da <https://docs.python.org/2/reference/grammar.html>)

```
single_input: NEWLINE | simple_stmt | compound_stmt NEWLINE
```

```
...
```

```
simple_stmt: small_stmt (';' small_stmt)* [';'] NEWLINE
```

```
small_stmt: (expr_stmt | print_stmt | del_stmt | pass_stmt | flow_stmt |  
            import_stmt | global_stmt | exec_stmt | assert_stmt)
```

```
...
```

```
del_stmt: 'del' exprlist
```

```
...
```

```
assert_stmt: 'assert' test [, ' test']
```

# ESEMPI

**G1** :  $S \rightarrow aSb \mid \varepsilon$

$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow \dots \Rightarrow a^n S b^n \Rightarrow a^n b^n$

**G2** :  $S \rightarrow LSR \mid SS \mid LR$

$L \rightarrow ($

$R \rightarrow )$

derivazione  
leftmost  
(più a sinistra)

$S \Rightarrow SS \Rightarrow LSRS \Rightarrow (SRS \Rightarrow (LRRS \Rightarrow^* (())S$   
 $\Rightarrow (())LR \Rightarrow^* (())()$

# DEFINIZIONE FORMALE

Una grammatica context-free (acontestuale), in breve **CFG** (**C**ontext-**F**ree **G**rammar), è una quadrupla  $G = (T, V, S, P)$  dove

- **T** e **V** sono insiemi finiti e disgiunti tra loro, rispettivamente dei **T**erminali e delle **V**ariabili,
- **S** è una variabile speciale detta simbolo iniziale e
- **P** è l'insieme delle **P**roduzioni (le regole di riscrittura) e contiene elementi della forma  $A \rightarrow v$ , dove  $A$  è una variabile (o nonterminale) e  $v$  è una stringa su  $(T \cup V)^*$ , quindi di variabili e terminali.

# DERIVAZIONI

Data una CFG  $G = (T, V, S, P)$  e  $x$  in  $(T \cup V)^*$ ,

la produzione  $B \rightarrow v$  è **applicabile** a  $x$

se  $B$  occorre in  $x$ ,

cioè se  $x = yBz$  per due stringhe  $y$  e  $z$  in  $(T \cup V)^*$ ,

il risultato dell'applicazione di  $B \rightarrow v$  a  $x$  è la

stringa  $w = yvz$

ottenuta sostituendo  $B$  con  $v$  in  $x$ , in tal caso  $w$  è stata derivata in un passo da  $x$ ,

$$yBz \Rightarrow_G yvz$$

$\Rightarrow_G^*$  è la chiusura riflessiva e transitiva di  $\Rightarrow_G$ .



# IL LINGUAGGIO GENERATO

Data una CFG  $G = (T, V, S, P)$  il linguaggio generato da  $G$  è

$$L(G) = \{x \in T^* \mid S \Rightarrow_G^* x\}.$$

$$G1 : S \rightarrow aSb \mid \varepsilon \quad L(G1) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

$$G2 : S \rightarrow LSR \mid SS \mid LR$$

$$\begin{aligned} L &\rightarrow ( \\ R &\rightarrow ) \end{aligned}$$

$L(G2)$  è l'insieme delle parentesi ben formate

# Esempio 1

**G** : **S**  $\rightarrow$  **aSa** | **bSb** | **c**

**L(G)** = {**xc***rev(x)* | **x** in {**a,b**}<sup>\*</sup>}

# Esempio 2

$$L(\mathbf{G}) = \{a^m b^n \mid m \geq n \geq 0\}$$

$$\mathbf{G} : \mathbf{S} \rightarrow a\mathbf{S}b \mid a\mathbf{A} \mid \varepsilon$$

$$\mathbf{A} \rightarrow a\mathbf{A} \mid \varepsilon$$

$$\mathbf{S} \Rightarrow a\mathbf{S}b \Rightarrow a^2\mathbf{S}b^2 \Rightarrow^* a^n b^n \quad , m=n>0$$

$$\Downarrow a\mathbf{A} \Rightarrow^* a^{m-1}\mathbf{A} \Rightarrow a^m \text{ il caso } n=0 \text{ e } m>0$$

$$\Downarrow^* a^n\mathbf{S}b^n \Rightarrow a^{n+1}\mathbf{A}b^n \Rightarrow^* a^{p+n}b^n \quad p>0, \text{ il caso } m>n>0$$

# Esempio 3

$$L(\mathbf{G}) = \{a^i b^j c^k \mid i=j \text{ o } j=k, \text{ con } i, j, k \geq 0\}$$

$$\mathbf{G} : \mathbf{S} \rightarrow a\mathbf{A}b\mathbf{D} \mid \mathbf{C}b\mathbf{B}c \mid \varepsilon$$

$$\mathbf{A} \rightarrow a\mathbf{A}b \mid \varepsilon$$

$$\mathbf{B} \rightarrow b\mathbf{B}c \mid \varepsilon$$

$$\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}c \mid \varepsilon$$

$$\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}a \mid \varepsilon$$

$$\text{Nota che } \mathbf{S} \Rightarrow a\mathbf{A}b\mathbf{D} \Rightarrow^* a^n b^n \mathbf{D} \Rightarrow^* a^n b^n c^n$$

$$\mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{C}b\mathbf{B}c \Rightarrow^* a^n b \mathbf{B}c \Rightarrow^* a^n b^n c^n$$

# Esempio

$$L(\mathbf{G}) = \{a^i b^j c^k \mid i+j=k, \text{ con } i, j, k \geq 0\}$$

$$\mathbf{G} : \mathbf{S} \rightarrow a\mathbf{A}c \mid b\mathbf{B}c \mid \varepsilon$$

$$\mathbf{A} \rightarrow a\mathbf{A}c \mid b\mathbf{B}c \mid \varepsilon$$

$$\mathbf{B} \rightarrow b\mathbf{B}c \mid \varepsilon$$

$$\mathbf{S} \Rightarrow a\mathbf{A}c \Rightarrow^* a^i \mathbf{A} c^i \Rightarrow a^i b \mathbf{B} c c^i \Rightarrow^* a^i b^j \mathbf{B} c^j c^i \Rightarrow a^i b^j c^{i+j}$$

$$\Downarrow b\mathbf{B}c \Rightarrow^* b^j \mathbf{B} c^j \Rightarrow b^j c^j, \text{ il caso } i=0$$

$$\Downarrow a\mathbf{A}c \Rightarrow^* a^i \mathbf{A} c^i \Rightarrow a^i c^i, \text{ il caso } j=0$$

# Esempio

$L(G) = \{ w \mid w \text{ in } \{a,b\}^* \text{ e in cui ogni prefisso ha un numero di } a \text{ maggiore o uguale a quello delle } b \}$

$G : S \rightarrow aSbS \mid aA \mid \epsilon$

$A \rightarrow aA \mid \epsilon$

$S \Rightarrow aSbS \Rightarrow^* aaSbSbS \Rightarrow^* a^n SbSbS \dots SbS \text{ (n volte)}$

$\Rightarrow^* a^n b^n$

$\Rightarrow a^n aAbSbS \dots SbS \Rightarrow^* a^n a^m bSbS \dots SbS$

$\Rightarrow a^n baAbS \dots SbS \dots$

# Esercizio su PDA

Costruire un PDA che accetta  
 $L = \{ a^i b^j c^k \mid 0 \leq i + j \leq k \}$