Automi, calcolabilità e complessità
Prova di esame del 4 febbraio 2019
Prof.ssa E. Fachini

1. L è un linguaggio sull'alfabeto {0,1} in cui ogni parola contiene almeno un 1 nella seconda metà. Formalmente L= {uv | u è in {0,1}*, v in {0,1}*1{0,1}* e |u| ≥ |v|}. Si dimostri che L non è regolare usando il Pumping Lemma.

Sol. Per ogni n prendiamo w = 0^n10^{n-1} in L e facciamo vedere che comunque scomposta in tre sottoparole x,y e z, con la condizione che |xy| ≤n |y|>0, esiste un i tale che xy^iz non è in L.
Comunque scomposta vuol dire che si deve lavorare su ogni scelta di x,y e z tali xyz=w, soddisfacenti le due condizioni sulle lunghezze delle parole.
Date le condizioni sulle lunghezze di xy e di y entrambe sono formate di soli 0 e quindi basta prendere i=0 per avere almeno un 0 in meno nella prima metà della parola e questa parola allora non è in L, perché l'unico 1 risulta nella prima metà.

2. Si dimostri che se $A \leq_m A_{TM}$ e $\bar{A} \leq_m A_{TM}$ allora A è decidibile. Lo si dimostri costruendo esplicitamente la TM che decide A.
Sol. Poiché ATM è Turing riconoscibile allora sia A che Ā sono Turing riconoscibili, grazie alle riduzioni. Siano allora M e M' le due TM che riconoscono A e Ā rispettivamente. La loro composizione in parallelo, T, è un decisore per A.
T
input x
output accetta se x è in A e rifiuta altrimenti.
1.copia x sul secondo nastro
2. esegui una mossa di M, sul primo nastro
   se M accetta, accetta
3. esegui una mossa di M', sul secondo nastro se M' accetta, rifiuta
4. torna al punto 2

T decide A perché se x è in A allora M prima o poi si ferma e accetta, se x non è in A è M' che prima o poi la accetta. La composizione in parallelo è necessaria perché se x fosse, per esempio, una parola non in A e M non si fermasse su x allora una TM che mandasse in esecuzione prima M e poi M' su x non si fermerebbe.

3. Si dimostri che NP e coNP sono contenuti in PSPACE.
Sol. Poiché NP contiene i problemi che si risolvono non deterministicamente in tempo polinomiale essi sono risolti anche in spazio polinomiale. Dunque NP è contenuto in NPSPACE. Per il Teorema di Savitch PSPACE = NPSPACE e quindi NP è contenuto in PSPACE.
Se A è un problema in coNP allora Ā è in NP, per definizione, e quindi in PSPACE, per quanto visto, ma PSPACE è chiusa rispetto al complemento, come ogni classe di complessità deterministica, e quindi A è in PSPACE.