Laurea triennale in INFORMATICA, Corso di **CALCOLO DELLE PROBABILITÀ**

Prof. G. Nappo – PRIMA PROVA IN ITINERE 23 APRILE 2012

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) ______________________________

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli **giustificando** brevemente i passaggi svolti.
ATTENZIONE: Svolgere tutti i calcoli fino in fondo, SOLO se avete tempo.

Esercizio 1. Il *poker* a 32 carte consiste in una scelta casuale di 5 carte da un mazzo di 32 carte: il mazzo è diviso **in** 4 **semi** [ossia Cuori, Quadri, Fiori e Picche] e **con** 8 **carte per seme** [ossia 7, 8, 9, 10, 11(=J), 12(=Q), 13(=K), 1(=A)].

i) ∗ Supponendo di estrarre le 5 carte in blocco (ovvero **se non si distingue l'ordine** di estrazione), calcolare il numero di possibili scelte. Se invece si estraessero una dopo l'altra (ovvero se **si distinguesse l'ordine** di estrazione) quante sarebbero le possibili scelte?

ii) ∗ Calcolare la probabilità di *colore*, ossia che le 5 carte estratte siano tutte dello stesso seme.

iii) Calcolare la probabilità di avere *scala reale*, ovvero le 5 carte estratte sono tutte dello stesso seme e sono una delle successioni $7, 8, 9, 10, 11$; $8, 9, 10, 11, 12$; $9, 10, 11, 12, 13$; $10, 11, 12, 13, 1$.

iv) Sapendo che le 5 carte estratte sono tutte delle stesso seme, calcolare la probabilità di avere *scala reale*.

i)* IN BLOCCO sono COMBINAZIONI di 32 elementi di classe 5

quindi $\binom{32}{5} = \frac{32!}{5!\,27!} = \frac{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$

IN ORDINE sono DISPOSIZIONI di 32 elementi di classe 5

quindi $32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28$

ii)* fissato il seme (ad esempio cuori) si tratta di una estrazione in blocco da un'urna con 32 palline di cui 8 bianche ("cuori") e 24 rosse (non "cuori") e quindi $\frac{\binom{8}{5}\binom{24}{0}}{\binom{32}{5}} = \frac{\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{5!}}}{\frac{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28}$

poiché i semi sono 4

la probabilità è

$4\cdot\frac{\binom{8}{5}\binom{24}{0}}{\binom{32}{5}} = 4\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28} = \frac{1}{31\cdot 29}$

iii) fissato il seme e la scala ~~...~~ la prob. è $\frac{1}{\binom{32}{5}}$

poiché ci sono 4 scale reali e 4 semi

la prob. cercata è $\frac{4\cdot 4}{\binom{32}{5}}$

iv) Posto S l'evento scala reale ed C l'evento "colore"

$P(S|C) = \frac{P(S\cap C)}{P(C)} = \frac{P(S)}{P(C)} = \frac{4\cdot 4}{\binom{32}{5}}\,\frac{1}{\frac{4\cdot\binom{8}{5}}{\binom{32}{5}}} = \frac{4}{\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{1}{14}$

iv) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(U_1)\,\mathbb{P}(A|U_1) + \mathbb{P}(U_2)\,\mathbb{P}(A|U_2)$$ Formula prob. Totali

$\mathbb{P}(A|U_2) = 1/3 \quad \mathbb{P}(U_1) = \mathbb{P}(U_2) = 1/2$

$$\mathbb{P}(A|U_1) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3 | U_1) + \mathbb{P}(B_1^c \cap B_2^c \cap B_3^c | U_1)$$

$$= \left(\frac{3}{6}\right)^3 + \left(\frac{3}{6}\right)^3$$ (ritratto di estrazioni da URNA di COMPOSIZIONE NOTA)

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \mathbb{P}(A^c|U_1) = \frac{3}{4}$$

quindi $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3+4}{24} = \frac{7}{24}$

e $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}$

v) $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$

e $\alpha_1 = \mathbb{P}(U_1 | A^c) = \dfrac{\mathbb{P}(U_1)\,\mathbb{P}(A^c|U_1)}{\mathbb{P}(A^c)} = \dfrac{1/2 \cdot \frac{3}{4}}{\frac{17}{24}} = \frac{9}{17}$

$\alpha_2 = \frac{8}{17}$

PRIMA PROVA IN ITINERE DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ del 23 aprile 2012, Prof. G. Nappo

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) ______________________

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi esclusivamente su questi fogli giustificando brevemente i passaggi svolti. Non è necessario svolgere tutti i calcoli fino in fondo.

Esercizio 2.

Ci sono 2 urne (esternamente uguali) e ciascuna contiene 6 palline e precisamente
- la 1^a urna contiene 3 palline bianche e 3 palline rosse
- la 2^a urna contiene 2 palline bianche e 4 palline rosse

Viene scelta a caso una tra le due urne e successivamente vengono effettuate **3 estrazioni con reinserimento dall'urna scelta**. Siano $U_i = \{$viene scelta l'urna $i\}$, per $i = 1, 2$, $B_k = \{k$-sima pallina estratta è bianca$\}$, per $k = 1, 2, 3$ e $A = \{$le tre palline estratte sono tutte dello stesso colore$\}$.

i) $*$ Calcolare la probabilità che la prima pallina estratta sia bianca.

ii) $*$ **Sapendo che prima pallina estratta è bianca**, calcolare la probabilità che è stata scelta la 2^a urna.

iii) **Sapendo che è stata scelta la 2^a urna**, calcolare la probabilità che le tre palline estratte **non** siano tutte dello stesso colore.

iv) Calcolare la probabilità **(non condizionata)** che le tre palline estratte **non** siano tutte dello stesso colore.

v) **Sapendo che** le tre palline estratte **non** sono tutte dello stesso colore, calcolare la probabilità α_1 che l'urna scelta sia la prima e la probabilità α_2 che l'urna scelta sia la seconda.

i)* $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}(B_1|U_1) + \mathbb{P}(U_2)\mathbb{P}(B_1|U_2) =$ Formula delle prob. Totali

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6} = \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}$

Formula di Bayes

ii)* $\mathbb{P}(U_2|B_1) = \dfrac{\mathbb{P}(U_2)\mathbb{P}(B_1|U_2)}{\mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}(B_1|U_2) + \mathbb{P}(U_2)\mathbb{P}(B_1|U_2)}$

$= \dfrac{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{\cancel{6}}}{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{3}{\cancel{6}} + \cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{\cancel{6}}} = \frac{2}{5}$

iii) ~~P(A~~ si cerca $\mathbb{P}(A^c|U_2) = 1 - \mathbb{P}(A|U_2)$

$\mathbb{P}(A|U_2) = \mathbb{P}(B_1\cap B_2\cap B_3|U_2) + \mathbb{P}(B_1^c\cap B_2^c\cap B_3^c|U_2)$

$= \left(\frac{2}{6}\right)^3 + \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1+8}{27} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$ ritratto di estr. dacune di composizione nota

$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(A^c|U_2) = 2/3}$

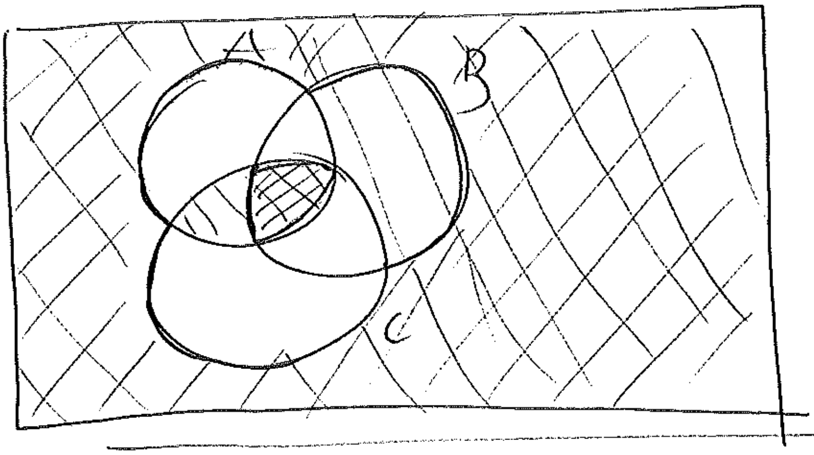
Alternativamente $A = \{2$ bianche e 1 rossa$\} \cup \{1$ bianca e 2 rosse$\}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A^c|U_2) = \binom{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^1 + \binom{3}{1}\left(\frac{2}{6}\right)^1\left(\frac{4}{6}\right)^2 = \cancel{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{\cancel{3}} + \cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 =$

$= \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = 6/9 = \boxed{2/3}$

ii) $E \cap D \cap F = (E \cap D) \cap F =$

$$= [(A \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)] \cap [(A \cap C) \cup (A^c \cap C^c)]$$
$$= (A \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c) = E \cap D$$



quindi $\boxed{\mathbb{P}(E \cap D \cap F) = \mathbb{P}(E \cap D) = 1/4}$

iii) Gli eventi D, E, F NON formano una famiglia di eventi Globalmente indipendenti: infatti

$$\mathbb{P}(E \cap D) = \mathbb{P}(E)\,\mathbb{P}(D)$$

e (si potrebbe dimostrare che valgono anche
$\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E)\,\mathbb{P}(F)$ e $\mathbb{P}(D \cap F) = \mathbb{P}(D)\,\mathbb{P}(F)$

MA $\mathbb{P}(D \cap E \cap F) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(D)\,\mathbb{P}(E)\,\mathbb{P}(F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

iv) $\mathbb{P}(D \cup E) = \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(D \cap E)$ Formula di INCLUSIONE ESCLUSIONE

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

v) $\boxed{\mathbb{P}(A \mid D \cup E)} = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap (D \cup E))}{\mathbb{P}(D \cup E)} = \dfrac{\mathbb{P}[(A \cap D) \cup (A \cap E)]}{3/4} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$

$$= \frac{3/2}{3} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$A \cap D = (A \cap B) \cup (A \cap A^c \cap B^c) = A \cap B$

$A \cap E = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap (B^c \cap C^c)) = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c)$

$\Rightarrow (A \cap D) \cup (A \cap E) = A \cap B \cup A \cap B^c \cap C^c$ e $\mathbb{P}(A \cap (D \cup E)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C^c) =$
$= \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - Prof. G. Nappo PRIMA PROVA IN ITINERE 23 APRILE 2012

NOME e COGNOME ____________________________

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli **giustificando** brevemente i passaggi svolti.
ATTENZIONE: È necessario svolgere tutti i calcoli fino in fondo

Esercizio 3. Siano A, B, e C eventi indipendenti, tutti con probabilità 1/2 e siano

$$D = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c); \quad E = (B \cap C) \cup (B^c \cap C^c); \quad F = (A \cap C) \cup (A^c \cap C^c)$$

i) * Calcolare $\mathbb{P}(D)$ e $\mathbb{P}(E)$, e dimostrare che gli eventi D ed E sono indipendenti (in senso probabilistico).

ii) Calcolare $P(E \cap D \cap F)$.

iii) Gli eventi D, E, F formano una famiglia di eventi globalmente indipendenti? (ovvero completamente indipendenti? ovvero mutuamente indipendenti?)

iv) Determinare la probabilità dell'evento $D \cup E$.

v) Sapendo che si è verificato l'evento $D \cup E$, determinare la probabilità di A.

i)* $D \cap E = [(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)] \cap [(B \cap C) \cup (B^c \cap C^c)] =$

$= \underbrace{[(A\cap B) \cap (B \cap C)]}_{= A \cap B \cap C} \cup \underbrace{[(A \cap B) \cap (B^c \cap C^c)]}_{= \emptyset} \cup \underbrace{[(A^c \cap B^c) \cap B^c \cap C^c]}_{= A^c \cap B^c \cap C^c}$

$\cup \underbrace{[(A^c \cap B^c) \cap (B \cap C)]}_{= \emptyset} = (A \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$

$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}[(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)] = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)$

in quanto A e B sono indip. e quindi anche A^c e B^c

$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Analogamente

$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(B^c \cap C^c) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(C^c) = \frac{1}{4}$

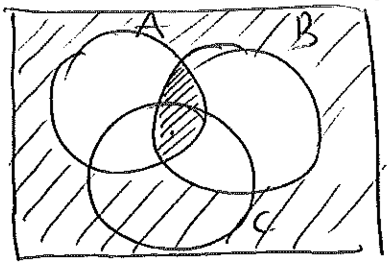
Infine $\mathbb{P}(D \cap E) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(C^c)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1/4$

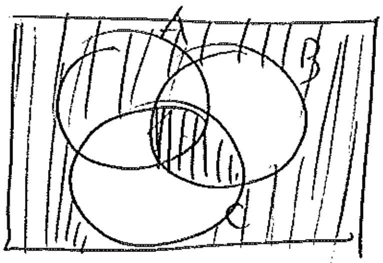
e quindi $\mathbb{P}(D \cap E) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(D) \cdot \mathbb{P}(E)$

cioè D ed E sono indipendenti

D

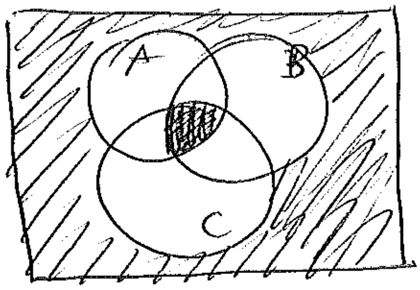


E

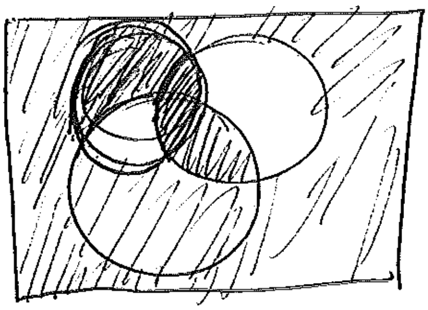


$D \cap E$

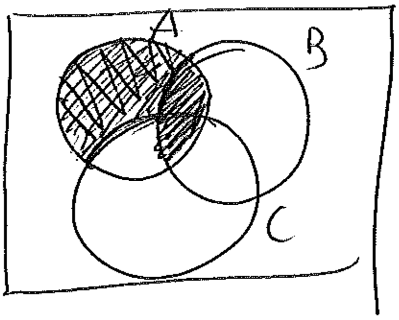
e quindi



$D \cup E$



$A \cap (D \cup E) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c \cap C^c)$



OPPURE $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap C^c)$