Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ 1**

Prof. G. Nappo – ESONERO DEL 20.04.2011

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli **giustificando** brevemente i passaggi svolti.
ATTENZIONE: Svolgere tutti i calcoli fino in fondo, SOLO se avete tempo.

Esercizio 1. Ci sono tre urne di diversa composizione:
l'urna 1 contiene 4 palline bianche e 1 rossa;
l'urna 2 contiene 1 pallina bianca e 4 rosse;
l'urna 3 contiene 2 palline bianche e 3 rosse.

Si sceglie un'urna con il seguente procedimento: si lanciano 3 monete ben equilibrate e
se Testa esce al più una volta si sceglie l'urna 1,
se Testa esce esattamente due volte si sceglie l'urna 2,
altrimenti si sceglie l'urna 3.
Una volta scelta l'urna, dall'urna scelta, si estraggono, SENZA REINSERIMENTO, due palline. Posto H_i l'evento viene scelta l'urna i, $i = 1, 2, 3$ e B_k l'evento la k-sima pallina estratta è bianca, **scrivere in termini di questi eventi** e **calcolare la probabilità** dei seguenti eventi

i) (a) la prima pallina estratta è bianca; (b) la seconda pallina estratta è bianca;

ii) almeno una delle palline estratte è bianca;

iii) le due palline estratte hanno colore diverso.

Sapendo che le due palline estratte hanno colore diverso, calcolare

iv) la probabilità condizionata che sia stata scelta l'urna 2;

v) la probabilità condizionata che non sia stata scelta l'urna 2.

Soluzione Esercizio 1. Prima di tutto dal testo dell'esercizio sappiamo che, posto X il numero di teste ottenute nel lancio di tre monete
$P(H_1) = P(X = 0\, oppure\, X = 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{3}{0}\frac{1}{2^3} + \binom{3}{1}\frac{1}{2^3} = 1/8 + 3/8 = 1/2$
$P(H_2) = P(X = 2) = \binom{3}{2}\frac{1}{2^3} = 3/8$
$P(H_3) = P(X = 3) = \binom{3}{3}\frac{1}{2^3} = 1/8 \Big(= 1 - P(H_1) - P(H_2) = 1 - 1/2 - 3/8 = 1/8\Big)$.
Inoltre sappiamo che

$$P(B_1|H_1) = 4/5 \quad P(B_1|H_2) = 1/5 \quad P(B_1|H_3) = 3/5$$

e che, dato che le estrazioni sono senza reinserimento,

$$P(B_1^c \cap B_2^c|H_1) = (1/5)\cdot(0/4) = 0 \quad P(B_1^c \cap B_2^c|H_2) = (4/5)(3/4) \quad P(B_1^c \cap B_2^c|H_3) = (3/5)(2/4)$$

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2^c|H_1) &= P(B_1^c \cap B_2|H_1) = (4/5)\cdot(1/4) \\ P(B_1 \cap B_2^c|H_2) &= P(B_1^c \cap B_2|H_2) = (1/5)(4/4) \\ P(B_1 \cap B_2^c|H_3) &= P(B_1^c \cap B_2|H_3) = (3/5)(2/4) \end{aligned}$$

$$P(B_1 \cap B_2|H_1) = (4/5)\cdot(3/4) \quad P(B_1 \cap B_2|H_2) = (1/5)(0/4) = 0 \quad P(B_1 \cap B_2|H_3) = (2/5)(1/4)$$

i) (a) la prima pallina estratta è bianca è l'evento B_1, e

$$P(B_1) = P(H_1)P(B_1|H_1) + P(H_2)P(B_1|H_2) + P(H_3)P(B_1|H_3) = \frac{1}{2}\frac{4}{5} + \frac{3}{8}\frac{1}{5} + \frac{1}{8}\frac{2}{5} = \frac{21}{40}.$$

(b) la seconda pallina estratta è bianca è l'evento B_2 e $P(B_2) = P(B_1)$, infatti

$$P(B_2) = P(H_1)P(B_2|H_1) + P(H_2)P(B_2|H_2) + P(H_3)P(B_2|H_3), \qquad \text{e} \qquad P(B_2|H_i) = P(B_1|H_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Alternativamente tenendo conto che $B_2 = (B_1 \cap B_2) \cup (B_1^c \cap B_2)$ e che gli eventi $B_1 \cap B_2$ e $B_1^c \cap B_2$ sono disgiunti

$$\begin{aligned}
P(B_2) &= P(B_1 \cap B_2) + P(B_1^c \cap B_2) \\
&= P(H_1)P(B_1 \cap B_2|H_1) + P(H_2)P(B_1 \cap B_2|H_2) + P(H_3)P(B_1 \cap B_2|H_3) \\
&+ P(H_1)P(B_1^c \cap B_2|H_1) + P(H_2)P(B_1^c \cap B_2|H_2) + P(H_3)P(B_1^c \cap B_2|H_3) \\
&= \frac{4}{8}\,\frac{4}{5}\,\frac{3}{4} + \frac{3}{8}\,\frac{1}{5}\,\frac{0}{4} + \frac{1}{8}\,\frac{2}{5}\,\frac{1}{4} + \frac{4}{8}\,\frac{1}{5}\,\frac{4}{4} + \frac{3}{8}\,\frac{4}{5}\,\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\,\frac{3}{5}\,\frac{2}{4} \\
&= \frac{4 \cdot 4 \cdot 3 + 0 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 5 \cdot 4} \\
&= \frac{4 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 1 + (1 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 1)}{8 \cdot 5 \cdot 4} \\
&= \frac{4 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2}{8 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{4 \cdot 3 + 4 + 3 + 2}{8 \cdot 5} \\
&= \frac{21}{40}
\end{aligned}$$

ii) almeno una delle palline estratte è bianca è l'evento $B_1 \cup B_2 = (B_1^c \cap B_2^c)^c$ e quindi

$$\begin{aligned}
&P(B_1 \cup B_2) = P((B_1^c \cap B_2^c)^c) = 1 - P(B_1^c \cap B_2^c) \\
&= 1 - \Big(P(H_1)P(B_1^c \cap B_2^c|H_1) + P(H_2)P(B_1^c \cap B_2^c|H_2) + P(H_3)P(B_1^c \cap B_2^c|H_3)\Big) \\
&= 1 - \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{5}\,\frac{0}{4} + \frac{3}{8}\,\frac{4}{5}\,\frac{3}{4} + \frac{1}{8}\,\frac{3}{5}\,\frac{2}{4}\right) = 1 - \frac{0 + 3 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 5 \cdot 4} = 1 - \frac{0 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 3}{8 \cdot 5 \cdot 2} = 1 - \frac{21}{80} = \frac{59}{80}
\end{aligned}$$

Alternativamente

$$\begin{aligned}
&P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) \\
&= 2\,\frac{21}{40} - \Big(P(H_1)P(B_1 \cap B_|H_1) + P(H_2)P(B_1 \cap B_2|H_2) + P(H_3)P(B_1 \cap B_2|H_3)\Big) \\
&= \frac{21}{20} - \left(\frac{4}{8}\,\frac{4}{5}\,\frac{3}{4} + \frac{3}{8}\,\frac{1}{5}\,\frac{0}{4} + \frac{1}{8}\,\frac{2}{5}\,\frac{1}{4}\right) = \frac{21}{20} - \frac{4 \cdot 4 \cdot 3 + 0 + 1 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{21}{20} - \frac{25}{8 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{84 - 25}{80} = \frac{59}{80}
\end{aligned}$$

Ancora un altro modo:
l'evento almeno una pallina estratta bianca è $B_1 \cup (B_1^c \cap B_2)$ e quindi, essendo i due eventi B_1 e $B_1^c \cap B_2$ incompatibili, $P\big(B_1 \cup (B_1^c \cap B_2)\big) = P\big(B_1\big) + P\big(B_1^c \cap B_2\big)$

iii) le due palline estratte hanno colore diverso è l'evento $(B_1 \cap B_2^c) \cup (B_1^c \cap B_2)$ ovvero il complementare dell'evento $(B_1 \cap B_2) \cup (B_1^c \cap B_2^c)$

Quindi

$$\begin{aligned}
&p_{iii} = P\big((B_1 \cap B_2^c) \cup (B_1^c \cap B_2)\big) = P\big(B_1 \cap B_2^c\big) + P\big(B_1^c \cap B_2\big) \\
&= \Big(P(H_1)P(B_1 \cap B_2^c|H_1) + P(H_2)P(B_1^c \cap B_2|H_2) + P(H_3)P(B_1 \cap B_2^c|H_3)\Big) \\
&+ \Big(P(H_1)P(B_1^c \cap B_2|H_1) + P(H_2)P(B_1^c \cap B_2|H_2) + P(H_3)P(B_1^c \cap B_2|H_3)\Big) \\
&= \left(\frac{4}{8}\,\frac{4}{5}\,\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\,\frac{1}{5}\,\frac{4}{4} + \frac{1}{8}\,\frac{2}{5}\,\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{4}{8}\,\frac{1}{5}\,\frac{4}{4} + \frac{3}{8}\,\frac{4}{5}\,\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\,\frac{3}{5}\,\frac{2}{4}\right)
\end{aligned}$$

ma è meglio osservare che, per simmetria, $P\big(B_1 \cap B_2^c\big) = P\big(B_1^c \cap B_2\big)$ e quindi

$$
\begin{aligned}
p_{iii} &= 2P\big(B_1^c \cap B_2\big) = 2\left(\frac{4}{8}\,\frac{1}{5}\,\frac{4}{4} + \frac{3}{8}\,\frac{4}{5}\,\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\,\frac{3}{5}\,\frac{2}{4}\right) = \\
&= \left(\frac{4}{4}\,\frac{1}{5}\,\frac{4}{4} + \frac{3}{4}\,\frac{4}{5}\,\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,\frac{3}{5}\,\frac{2}{4}\right) = \frac{4\cdot 1\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 1 + 1\cdot 3\cdot 2}{2^4\cdot 5} = \frac{8+6+3}{2^3\cdot 5} = \frac{17}{40};
\end{aligned}
$$

oppure

$$
\begin{aligned}
p_{iii} &= 1 - P(B_1 \cap B_2) \cup (B_1^c \cap B_2^c) = 1 - \Big(P\big(B_1 \cap B_2\big) + P\big(B_1^c \cap B_2^c\big)\Big) \\
&= 1 - \Big(P(H_1)P(B_1 \cap B_2|H_1) + P(H_2)P(B_1 \cap B_2|H_2) + P(H_3)P(B_1 \cap B_2|H_3)\Big) \\
&- \Big(P(H_1)P(B_1^c \cap B_2^c|H_1) + P(H_2)P(B_1^c \cap B_2^c|H_2) + P(H_3)P(B_1^c \cap B_2^c|H_3)\Big) \\
&= 1 - \left(\frac{4}{8}\,\frac{4}{5}\,\frac{3}{4} + \frac{3}{8}\,\frac{1}{5}\,\frac{0}{4} + \frac{1}{8}\,\frac{2}{5}\,\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{4}{8}\,\frac{1}{5}\,\frac{0}{4} + \frac{3}{8}\,\frac{4}{5}\,\frac{3}{4} + \frac{1}{8}\,\frac{3}{5}\,\frac{2}{4}\right) \\
&= 1 - \left(\frac{4\cdot 4\cdot 3 + 0 + 1\cdot 2\cdot 1}{8\cdot 5\cdot 4}\right) - \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{5}\,\frac{0}{4} + \frac{3}{8}\,\frac{4}{5}\,\frac{3}{4} + \frac{1}{8}\,\frac{3}{5}\,\frac{2}{4}\right) - = 1 - \frac{25}{8\cdot 5\cdot 2} - \frac{21}{80} = \frac{80-25-21}{80} \\
&= \frac{34}{80} = \frac{17}{40}
\end{aligned}
$$

OSSERVAZIONE Alcuni studenti hanno pensato di calcolare, ad esempio, $P(B_1 \cap B_2^c)$ nel seguente modo

$$P(B_1 \cap B_2^c) = P(B_1)\,P(B_2^c|B_1)$$

Ricordando che $P_{B_1}(\cdot) := P(\cdot|B_1)$ definisce una probabilità, si può poi usare la formula delle probabilità totali per questa probabilità e calcolare

$$
\begin{aligned}
P(B_2^c|B_1) &= P_{B_1}(B_2^c) \\
&= P_{B_1}(H_1)P_{B_1}(B_2^c|H_1) + P_{B_1}(H_2)P_{B_1}(B_2^c|H_2) + P_{B_1}(H_3)P_{B_1}(B_2^c|H_3) \\
&= P_{B_1}(H_1)P(B_2^c|H_1 \cap B_1) + P_{B_1}(H_2)P(B_2^c|H_2 \cap B_1) + P_{B_1}(H_3)P(B_2^c|H_3 \cap B_1) \\
&= P_{B_1}(H_1)\,\frac{1}{4} + P_{B_1}(H_2)\,\frac{4}{4} + P_{B_1}(H_3)\,\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Per finire l'esercizio, si sarebbero dovuti calcolare[1], per $k = 1, 2, 3$,

$$P_{B_1}(H_k) = P(H_k|B_1) = \frac{P(H_k)P(B_1|H_k)}{P(B_1)} = \frac{P(H_k)P(B_1|H_k)}{P(H_1)P(B_1|H_1) + P(H_2)P(B_1|H_2) + P(H_3)P(B_1|H_3)}$$

ossia

$$
\begin{aligned}
P(H_1|B_1) &= \frac{\frac{4}{8}\,\frac{4}{5}}{\frac{4}{8}\,\frac{4}{5} + \frac{3}{8}\,\frac{1}{5} + \frac{1}{8}\,\frac{3}{5}} = \frac{4\cdot 4}{4\cdot 4 + 3\cdot 1 + 1\cdot 3} = \frac{16}{22} \\
P(H_2|B_1) &= \frac{\frac{3}{8}\,\frac{1}{5}}{\frac{4}{8}\,\frac{4}{5} + \frac{3}{8}\,\frac{1}{5} + \frac{1}{8}\,\frac{3}{5}} = \frac{3\cdot 1}{4\cdot 4 + 3\cdot 1 + 1\cdot 3} = \frac{3}{22} \\
P(H_3|B_1) &= \frac{\frac{1}{8}\,\frac{3}{5}}{\frac{4}{8}\,\frac{4}{5} + \frac{3}{8}\,\frac{1}{5} + \frac{1}{8}\,\frac{3}{5}} = \frac{1\cdot 3}{4\cdot 4 + 3\cdot 1 + 1\cdot 3} = \frac{3}{22}
\end{aligned}
$$

Sapendo che le due palline estratte hanno colore diverso, calcolare

[1] ATTENZIONE: un errore comune è stato quello di usare $P(H_k)$ invece di $P_{B_1}(H_k) = P(H_k|B_1)$

iv) la probabilità condizionata che sia stata scelta l'urna 2;
Stiamo cercando

$$
\begin{aligned}
& p_{iv} = P(H_2|(B_1 \cap B_2^c) \cup (B_1^c \cap B_2)) \\
= & \frac{P(H_2)P((B_1 \cap B_2^c) \cup (B_1^c \cap B_2)|H_2)}{P(H_1)P((B_1 \cap B_2^c) \cup (B_1^c \cap B_2)|H_1) + P(H_2)P((B_1 \cap B_2^c) \cup (B_1^c \cap B_2)|H_2) + P(H_3)P((B_1 \cap B_2^c) \cup (B_1^c \cap B_2)|H_3)} \\
& = \frac{\frac{3}{8}\, 2\frac{1}{5}\, \frac{4}{4}}{\frac{4}{8}\, 2\frac{4}{5}\, \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\, 2\frac{1}{5}\, \frac{4}{4} + \frac{1}{8}\, 2\frac{3}{5}\, \frac{2}{4}} \\
& = \frac{3 \cdot 4 \cdot 1}{4 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{6}{17}
\end{aligned}
$$

v) la probabilità condizionata che non sia stata scelta l'urna 2;
Poiché la probabilità condizionata a un fissato evento è una probabilità,
e poiché stiamo cercando $P(H_2^c|(B_1 \cap B_2^c) \cup (B_1^c \cap B_2))$, possiamo dire immediatamente che

$$p_v = 1 - p_{iv} = \frac{11}{17}$$

Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ 1**

Prof. G. Nappo – ESONERO DEL 20.04.2011

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli **giustificando** brevemente i passaggi svolti.
Non è necessario svolgere tutti i calcoli fino in fondo.

NOME e COGNOME____

Esercizio 2. Nell'harem del Sultano B. ci sono 8 ragazze bionde, di cui 5 con gli occhi chiari e 3 con gli occhi scuri, e 12 ragazze castane, di cui 4 con gli occhi chiari e 8 con gli occhi scuri. Per passare una serata piacevole, B. sceglie a caso 5 ragazze dal proprio harem.

i) Calcolare la probabilità che tra le 5 ragazze scelte ce ne siano tre bionde e due castane.

ii) Calcolare la probabilità che tra le 5 ragazze scelte almeno una sia bionda con gli occhi chiari.

iii) Calcolare la probabilità che tra le 5 ragazze scelte 3 siano bionde, 1 castana con gli occhi chiari e 1 castana con gli occhi scuri.

iv) Sapendo che le 5 ragazze scelte hanno tutte gli occhi chiari, calcolare la probabilità che 3 di queste siano bionde e 2 castane.

v) Sapendo che sono state scelte 3 ragazze bionde e 2 castane, calcolare la probabilità che 3 abbiano gli occhi chiari e 2 gli occhi scuri.

Soluzione Esercizio 2. Prima di iniziare a risolvere il problema notiamo che ci sono 4 tipi: B_{ch} (Bionda occhi chiari) B_{sc} (Bionda occhi scuri) C_{ch} (Castana occhi chiari) C_{sc} (Castana occhi scuri) e che si ha

$$n(B_{ch}) = 5,\ n(B_{sc}) = 3,\ n(C_{ch}) = 4,\ n(C_{sc}) = 8,$$

dove $n(I)$ indica il numero delle ragazze di tipo I ($I = B_{ch}, B_{sc}, C_{ch}, C_{sc}$).

i) **Calcolare la probabilità che tra le 5 ragazze scelte ce ne siano tre bionde e due castane.**

Poiché si chiede che ce ne siano 3 bionde e 3 castane, il problema è equivalente a un problema di 5 estrazioni SENZA reinserimento da un'urna che contiene palline di 2 tipi:
tipo B (Bionda) e tipo C (Castana), con

$$n(B) = n(B_{ch})+n(B_{sc}) = 5+3 = 8, \quad n(C) = n(C_{ch})+n(C_{sc}) = 4+8 = 12, \quad \text{per un totale di 20 palline.}$$

Quindi

$$p_i = \frac{\binom{8}{3}\binom{12}{2}}{\binom{20}{5}} = \frac{\frac{8!}{3!5!}\frac{12!}{2!11!}}{\frac{20!}{5!15!}} = \frac{\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2}\frac{12\cdot11}{2}}{\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{5\cdot4\cdot3\cdot2}} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot11}{19\cdot3\cdot17\cdot16} = \frac{7\cdot11}{19\cdot17}$$

ii) **Calcolare la probabilità che tra le 5 ragazze scelte almeno una sia bionda con gli occhi chiari.**
Poiché la domanda riguarda solo il tipo B_{ch}, il problema è equivalente a un problema di 5 estrazioni SENZA reinserimento da un'urna che contiene palline di 2 tipi:
di tipo B_{ch} (Bionda occhi chiari) A (NON Bionda occhi chiari), con

$$n(B_{ch}) = 5, \quad n(A) = +n(B_{sc}) + n(C_{ch}) + n(C_{sc}) = 3+4+8 = 15, \quad \text{per un totale di 20 palline.}$$

L'evento della domanda è il complementare dell'evento "nessuna ragazza bionda" e quindi si può calcolare come

$$p_{ii} = 1 - \frac{\binom{5}{0}\binom{15}{5}}{\binom{20}{5}} = \frac{1\frac{15!}{5!15!}}{\frac{20!}{5!15!}} = 1 - \frac{15!}{20!} = 1 - \frac{1}{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}.$$

Alternativamente, ma in modo MENO EFFICIENTE si poteva anche calcolare come

$$p_{ii} = \sum_{k=1}^{5} \frac{\binom{5}{k}\binom{15}{5-k}}{\binom{20}{5}}$$

iii) **Calcolare la probabilità che tra le 5 ragazze scelte 3 siano bionde, 1 castana con gli occhi chiari e 1 castana con gli occhi scuri.**

Il problema è equivalente a un problema di 5 estrazioni SENZA reinserimento da un'urna che contiene palline di 3 tipi:
di tipo B (Bionda) C_{ch} (Castana occhi chiari) C_{sc} (Castana occhi scuri), con

$$n(B) = n(B_{ch}) + n(B_{sc}) = 5 + 3 = 8, \quad n(C_{ch}) = 4, \quad n(C_{sc}) = 8, \quad \text{per un totale di 20 palline.}$$

Quindi

$$p_{iii} = \frac{\binom{8}{3}\binom{4}{1}\binom{8}{1}}{\binom{20}{5}} = \frac{\frac{8!}{3!5!} \cdot 4 \cdot 8}{\frac{20!}{5!15!}} = \frac{\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2} \cdot 4 \cdot 8}{\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}} \big(= (32/66)p_i = (16/33)p_i \big)$$

iv) **Sapendo che le 5 ragazze scelte hanno tutte gli occhi chiari, calcolare la probabilità che 3 di queste siano bionde e 2 castane.**

Si tratta di calcolare una probabilità condizionata, ma poiché sappiamo che sono state estratte solo ragazze con occhi chiari,

Il problema è equivalente a un problema di 5 estrazioni SENZA reinserimento da un'urna che contiene palline di 2 tipi:
di tipo B_{ch} (Bionda occhi chiari) C_{ch} (Castana occhi chiari), ma stavolta, poiché sappiamo che sono state estratte solo ragazze con occhi chiari, abbiamo che

$$n'(B_{ch}) = 5, \quad n'(C_{ch}) = 4 \quad \text{per un totale di 9 palline.}$$

Quindi

$$p_{iv} = \frac{\binom{5}{3}\binom{4}{2}}{\binom{9}{5}} = \frac{\frac{5!}{3!2!}\frac{4!}{2!2!}}{\frac{9!}{5!4!}} = \frac{\frac{5\cdot 4}{2}\frac{4\cdot 3}{2}}{\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2}} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 7\cdot 6} = \frac{5\cdot 2}{7\cdot 3} = \frac{10}{21} \qquad (*)$$

Alternativamente (utilizzando la definizione di probabilità condizionata) si poteva calcolare come

$$p_{iv} = \frac{P(\text{3 Bionde occhi chiari, 2 Castane occhi chiari})}{P(\text{solo occhi chiari})}$$

In tale eventualità bisognava considerare come un problema di 5 estrazioni SENZA reinserimento da un'urna che contiene palline di 3 tipi:
di tipo B_{ch} (Bionda occhi chiari) C_{ch} (Castana occhi chiari) A_{sc} (occhi scuri) e con

$$n(B_{ch}) = 5,\ n(C_{ch})4,\ n(A_{sc}) = n(B_{sc}) + n(C_{sc}) = 11.$$

Quindi

$$P(\text{3 Bionde occhi chiari, 2 Castane occhi chiari}) = \frac{\binom{5}{3}\binom{4}{2}\binom{11}{0}}{\binom{20}{5}} \left(= \frac{\binom{5}{3}\binom{3}{0}\binom{4}{2}\binom{8}{0}}{\binom{20}{5}} \right)$$

mentre, per calcolare la probabilità al denominatore, si può considerare il problema equivalente a un problema di 5 estrazioni SENZA reinserimento, da un'urna che contiene palline di 2 tipi:

$$O_{ch}\,\text{(occhi chiari)}, \quad A_{sc}\,\text{(occhi scuri)},$$

con

$$n(O_{ch}) = n(Bch) + n_(B_{sc}) = 5 + 4 = 9 \quad n(A_{sc}) = n(B_{sc}) + n(C_{sc}) = 3 + 8 = 11.$$

Quindi

$$P(\text{solo occhi chiari}) = \frac{\binom{5+4}{3}\binom{11}{0}}{\binom{20}{5}} \left(= \frac{\binom{5+4}{3}\binom{3}{0}\binom{8}{0}}{\binom{20}{5}} \right)$$

Per finire basta poi mettere insieme le ultime tre relazioni e ottenere di nuovo $(*)$:

$$p_{iv} = \frac{P(\text{3 Bionde occhi chiari, 2 Castane occhi chiari})}{P(\text{solo occhi chiari})} = \frac{\frac{\binom{5}{3}\binom{4}{2}}{\binom{20}{5}}}{\frac{\binom{9}{3}}{\binom{20}{5}}} = \frac{\binom{5}{3}\binom{4}{2}}{\binom{9}{3}}$$

v) **Sapendo che sono state scelte 3 ragazze bionde e 2 castane, calcolare la probabilità che 3 abbiano gli occhi chiari e 2 gli occhi scuri.**

Il problema è equivalente a un problema di estrazione SENZA reinserimento da un'urna che contiene palline di 4 tipi:
di tipo B_{ch} (Bionda occhi chiari) B_{sc} (Bionda occhi scuri) C_{ch} (Castana occhi chiari) C_{sc} (Castana occhi scuri), con

$$n(B_{ch}) = 5,\ n(B_{sc}) = 3,\ n(C_{ch}) = 4,\ n(C_{sc}) = 8.$$

Il numero delle estrazioni è uguale a 5 elementi.
Posto

$O_i^{(ch)} \cap A_2^{sc} = \{\textit{vengono scelte } 3 \textit{ ragazze con occhi chiari }\} \cap \{\textit{vengono scelte } 2 \textit{ ragazze con occhi scuri }\}$

e

$$\begin{aligned} B_i &= \{\textit{vengono scelte } i \textit{ ragazze bionde }\} = \{\textit{il numero delle ragazze bionde scelte è } i\}, \\ C_i &= \{\textit{vengono scelte } i \textit{ ragazze castane}\} = \{\textit{il numero delle ragazze castane scelte è } i\}, \end{aligned}$$

la probabilità (condizionata) cercata è $\mathbf{P(O_3^{(ch)} \cap A_2^{sc} | B_3 \cap C_2)} = \dfrac{\mathbf{P(O_3^{(ch)} \cap A_2^{sc} \cap B_3 \cap C_2)}}{\mathbf{P(B_3 \cap C_2)}}$. Inoltre, posto

$$\begin{aligned} B_i^{(ch)} &= \{\textit{vengono scelte } i \textit{ ragazze bionde con occhi chiari scelte è } i\} \\ &= \{\textit{il numero delle ragazze bionde con occhi chiari scelte è } i\}, \\ B_i^{(sc)} &= \{\textit{vengono scelte } i \textit{ ragazze bionde con occhi scuri}\} \\ &= \{\textit{il numero delle ragazze bionde con occhi scuri scelte è } i\}, \\ C_i^{(ch)} &= \{\textit{vengono scelte } i \textit{ ragazze castane con occhi chiari}\} \\ &= \{\textit{il numero delle ragazze castane con occhi chiari scelte è } i\}, \\ C_i^{(sc)} &= \{\textit{vengono scelte } i \textit{ ragazze castane con occhi scuri}\} \\ &= \{\textit{il numero delle ragazze castane con occhi scuri scelte è } i\}, \end{aligned}$$

si ha che

$$O_3^{(ch)} = \{\textit{vengono scelte } 3 \textit{ ragazze con occhi chiari }\} = (B_0^{(ch)} \cap C_3^{(ch)}) \cup (B_1^{(ch)} \cap C_2^{(ch)}) \cup (B_2^{(ch)} \cap C_1^{(ch)}) \cup (B_3^{(ch)} \cap C_0^{(ch)})$$

$$A_2^{(sc)} = \{\textit{vengono scelte } 2 \textit{ ragazze con occhi scuri }\} = (B_0^{(sc)} \cap C_2^{(sc)}) \cup (B_1^{(sc)} \cap C_1^{(sc)}) \cup (B_2^{(sc)} \cap C_0^{(sc)})$$

per cui l'evento

$\{\textit{vengono scelte } 3 \textit{ ragazze con occhi chiari e } 2 \textit{ con occhi scuri}\} \cap \{\textit{vengono scelte } 3 \textit{ ragazze bionde e } 2 \textit{ castane}\}$

coincide con

$$\Big((B_1^{(ch)} \cap C_2^{(ch)}) \cap (B_2^{(sc)} \cap C_0^{(sc)})\Big) \cup \Big((B_2^{(ch)} \cap C_1^{(ch)}) \cap (B_1^{(sc)} \cap C_1^{(sc)})\Big) \cup \Big((B_3^{(ch)} \cap C_0^{(ch)}) \cap (B_0^{(sc)} \cap C_2^{(sc)})\Big)$$

Quindi la probabilità condizionata cercata vale

$$\frac{P\Big((B_1^{(ch)} \cap C_2^{(ch)}) \cap (B_2^{(sc)} \cap C_0^{(sc)})\Big) + P\Big((B_2^{(ch)} \cap C_1^{(ch)}) \cap (B_1^{(sc)} \cap C_1^{(sc)})\Big) + P\Big((B_3^{(ch)} \cap C_0^{(ch)}) \cap (B_0^{(sc)} \cap C_2^{(sc)})\Big)}{P\Big(B_3 \cap C_2\Big))}$$

e quindi

$$= \sum_{i=1}^{3} \frac{P\big(B_i^{(ch)} \cap B_{3-i}^{(sc)} \cap C_{3-i}^{(ch)} \cap C_{i-1}^{(sc)}\big)}{P(B_3 \cap C_2)}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \frac{\frac{\binom{5}{i}\binom{3}{3-i}\binom{4}{3-i}\binom{8}{i-1}}{\binom{20}{5}}}{\frac{\binom{9}{3}\binom{11}{2}}{\binom{20}{5}}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\binom{5}{i}\binom{3}{3-i}\binom{4}{3-i}\binom{8}{i-1}}{\binom{9}{3}\binom{11}{2}}$$

Alternativamente, con il linguaggio delle variabili aleatorie:
Posto X_I il numero di ragazze scelte di tipo I, con $I = B_{ch},\ B_{sc},\ C_{ch},\ C_{sc},\ B,\ C$, la probabilità condizionata cercata è

$$P\big(\{X_{B_{ch}} + X_{C_{ch}} = 3,\ \ X_{B_{sc}} + X_{C_{sc}} = 2\} | \{X_B = 3,\ X_C = 2\}\big)$$

Cioè, tenendo conto che, sapendo che il numero totale X_B delle bionde vale 3 e che il numero totale X_B delle castane vale 2 (se $X_{B_{ch}} = i$ allora $X_{B_{sc}} = 3 - i$, e se $X_{C_{ch}} = j$ allora $X_{C_{sc}} = 2 - j$) e che, quando $X_{B_{ch}} = i$ allora $X_{C_{ch}} = 3 - i$ e quando $X_{B_{sc}} = \ell$ allora $X_{C_{sc}} = 2 - \ell$:

$$\begin{aligned}
&P\big(\{X_{B_{ch}} + X_{C_{ch}} = 3,\ \ X_{B_{sc}} + X_{C_{sc}} = 2\} | \{X_B = 3,\ X_C = 2\}\big)\\
&= \sum_i P\big(\{X_{B_{ch}} = i,\ X_{C_{ch}} = 3 - i,\ \ X_{B_{sc}} = 3 - i,\ X_{C_{sc}} = 2 - (3 - i)\} | \{X_B = 3,\ X_C = 2\}\big)\\
&= \sum_i P\big(\{X_{B_{ch}} = i,\ X_{C_{ch}} = 3 - i,\ \ X_{B_{sc}} = 3 - i,\ X_{C_{sc}} = i - 1\} | \{X_B = 3,\ X_C = 2\}\big)
\end{aligned}$$

Chiaramente, tenendo conto che $X_{B_{ch}} = i$ è necessario che $i \geq 0$, tenendo conto che $X_{B_{sc}} = 3 - i$ è necessario che $i \leq 3$, tenendo conto che $X_{C_{ch}} = 3 - i$ è necessario che $i \leq 3$ e $i \geq 1 (0 \leq 3 - i \leq 2)$, tenendo conto che $X_{C_{sc}} = i - 1$ è necessario che $i \geq 1$ e $i \leq 3$ $(0 \leq i - 1 \leq 2)$ (infine si noti che $X_{C_{ch}} + X_{C_{sc}} = 3 - i + i - 1 = 2$) Quindi gli unici casi da considerare sono $i = 1, 2, 3$, e quindi

$$\begin{aligned}
&P\big(\{X_{B_{ch}} + X_{C_{ch}} = 3,\ \ X_{B_{sc}} + X_{C_{sc}} = 2\} | \{X_B = 3,\ X_C = 2\}\big)\\
&= \sum_{i=1}^{3} P\big(\{X_{B_{ch}} = i,\ X_{C_{ch}} = 3 - i,\ \ X_{B_{sc}} = 3 - i,\ X_{C_{sc}} = i - 1\} | \{X_B = 3,\ X_C = 2\}\big)\\
&= \sum_{i=1}^{3} \frac{P\big(\{X_{B_{ch}} = i,\ X_{C_{ch}} = 3 - i,\ \ X_{B_{sc}} = 3 - i,\ X_{C_{sc}} = i - 1\}\big)}{P\big(\{X_B = 3,\ X_C = 2\}\big)}\\
&= \sum_{i=1}^{3} \frac{\frac{\binom{5}{i}\binom{4}{3-i}\binom{3}{3-i}\binom{8}{i-1}}{\binom{20}{5}}}{\frac{\binom{9}{3}\binom{11}{2}}{\binom{20}{5}}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\binom{5}{i}\binom{4}{3-i}\binom{3}{3-i}\binom{8}{i-1}}{\binom{9}{3}\binom{11}{2}}
\end{aligned}$$

Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ 1**

Prof. G. Nappo – ESONERO DEL 20.04.2011

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli **giustificando** brevemente i passaggi svolti.
ATTENZIONE: È necessario svolgere tutti i calcoli fino in fondo.

NOME e COGNOME____

Esercizio 3. Siano H_i, con $i = 1, 2, ..., 7, 8$, eventi che formano una partizione dell'evento certo.
Si supponga che $P(H_i) = \theta$ per $i = 1, 2, 3, 4$ e $P(H_i) = 3\theta$ per $i = 5, 6, 7, 8$.

i) Quanto deve valere θ?

Si pongano $A = H_1 \cup H_2 \cup H_5 \cup H_6$ e $B = H_1 \cup H_3 \cup H_5 \cup H_7$.

ii) Gli eventi A e B sono indipendenti?

Sia ora $C = H_1 \cup H_4 \cup H_5 \cup H_8$.

iii) Gli eventi A, B e C formano una famiglia di eventi completamente indipendenti?

iv) Posto D l'evento si verifica almeno uno tra gli eventi A e B, gli eventi D e C sono
(a) indipendenti? (b) correlati positivamente? (c) correlati negativamente?

Soluzione Esercizio 3.

i) **Quanto deve valere θ?:** $\theta = \frac{1}{16}$.

Infatti, essendo H_i una partizione,

$$1 = \sum_{i=1}^{8} P(H_i) = \sum_{i=1}^{4} P(H_i) + \sum_{i=5}^{8} P(H_i) = 4\theta + 4(3\theta) = 16\,\theta$$

da cui $\theta = 1/16$.

ii) **Gli eventi A e B sono indipendenti?**

Gli eventi $A = H_1 \cup H_2 \cup H_5 \cup H_6$ e $B = H_1 \cup H_3 \cup H_5 \cup H_7$ sono indipendenti:
Infatti A e B sono indipendenti se e solo se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

e ciò si verifica in quanto

$$P(A \cap B) = 1/4 \quad \text{e} \quad P(A) = P(B) = 1/2.$$

Iniziamo calcolando $P(A)$ e $P(B)$:

$$P(A) = P(H_1 \cup H_2 \cup H_5 \cup H_6) = P(H_1) + P(H_2) + P(H_5) + P(H_6) = 2\theta + 2(3\theta) = 8\theta = 8/16 = 1/2$$

e similmente

$$P(B) = P(H_1 \cup H_3 \cup H_5 \cup H_7) = P(H_1) + P(H_3) + P(H_5) + P(H_7) = 2\theta + 2(3\theta) = 8\theta = 8/16 = 1/2$$

Per calcolare $P(A \cap B)$ osserviamo che

$$A \cap B = (H_1 \cup H_2 \cup H_5 \cup H_6) \cap (H_1 \cup H_3 \cup H_5 \cup H_7) = H_1 \cup H_5$$

e quindi

$$P(A \cap B) = P(H_1 \cup H_5) = \theta + 3\theta = 4\theta = 4/16 = 1/4$$

iii) **Gli eventi A, B e C formano una famiglia di eventi completamente indipendenti?**

Gli eventi A, B e $C = H_1 \cup H_4 \cup H_5 \cup H_8$ NON formano una famiglia di eventi completamente indipendenti.
Infatti A, B e C sono completamente indipendenti se e solo se verificano le seguenti condizioni

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),\ P(A \cap C) = P(A)P(C),\ P(B \cap C) = P(B)P(C),\ P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) \quad (*)$$

ed essendo, $P(A) = P(B) = 1/2$ (come già visto),

$$P(C) = P(H_1 \cup H_4 \cup H_5 \cup H_8) = P(H_1) + P(H_4) + P(H_5) + P(H_8) = 2\theta + 2(3\theta) = 8\theta = 8/16 = 1/2$$

$A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C = H_1 \cup H_5$ da cui $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C) = P(H_1 \cup H_5) = 1/4$,

le prime tre condizioni della $(*)$ sono verificate, ma la quarta no:

$$P(A \cap B \cap C) = P(H_1 \cup H_5) = 1/4, \quad \text{mentre} \quad P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}. \qquad (**)$$

Alternativamente si può considerare che A, B e C sono indipendenti se e solo se

$$P(\tilde{A} \cap \tilde{B} \cap \tilde{C}) = P(\tilde{A})P(\tilde{B})P(\tilde{C}) \qquad (*bis)$$

dove $\tilde{A} = A$ o $\tilde{A} = A^c$, $\tilde{B} = B$ o $\tilde{B} = B^c$, $\tilde{C} = C$ o $\tilde{C} = C^c$, ugualmente dalla $(*)$ si vede immediatamente che nel caso in cui $\tilde{A} = A$ $\tilde{B} = B$ e $\tilde{C} = C$ la condizione $(*bis)$ NON e' verificata e quindi i tre eventi A, B e C non sono indipendenti.

iv) **Posto D l'evento si verifica almeno uno tra gli eventi A e B, gli eventi D e C sono (a) indipendenti? (b) correlati positivamente? (c) correlati negativamente?**

Gli eventi D e C sono correlati negativamente ossia $P(D \cap C) < P(D)P(C)$
VERIFICA:
Per iniziare vediamo che

$$D = A \cup B = (H_1 \cup H_2 \cup H_5 \cup H_6) \cup (H_1 \cup H_3 \cup H_5 \cup H_7) = H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_5 \cup H_6 \cup H_7$$

e che

$$D \cap C = (A \cup B) \cap (C) = (H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_5 \cup H_6 \cup H_7) \cap (H_1 \cup H_4 \cup H_5 \cup H_8) = H_1 \cup H_5$$

da cui immediatamente

$$P(D) = 3\theta + 3(3\theta) = 12\theta = 12/16 = 3/4, \qquad P(D \cap C) = \theta + 3\theta = 4/16 = 1/4$$

Poiché sappiammo, dal punto precedente, che $P(C) = 1/2$, possiamo dire che

$$P(D \cap C) < P(D)P(C) \Leftrightarrow 1/4 < (3/4)(1/2) = 3/8$$