Laurea triennale in INFORMATICA, Corso di **CALCOLO DELLE PROBABILITÀ**

COMPITO INTERO e SECONDA PROVA IN ITINERE - 11 giugno 2012 - FOGLIO RISPOSTE

NOME e COGNOME____

CANALE: G. Nappo VOTO: __________

N.B. Scrivere le risposte dei vari punti degli esercizi
oppure, in mancanza di tempo e/o di spazio, mettere una croce sui punti risolti degli esercizi. ATTENZIONE ALLE DOMANDE CON L'ASTERISCO $*$

Esercizio 1. (PER IL COMPITO INTERO)

i) ☐ $*$ __________

ii) ☐ $*$ __________

iii) ☐ $*$ __________

iv) ☐ __________

v) ☐ __________

vi) ☐ __________

Esercizio 2. (PER IL COMPITO INTERO E LA II PROVA IN ITINERE)

i) ☐ $*$ __________

ii) ☐ $*$ __________

iii) ☐ __________

iv) ☐ __________

v) ☐ __________

Esercizio 3. (PER IL COMPITO INTERO E LA II PROVA IN ITINERE)

i) ☐ $*$ __________

ii) ☐ $*$ __________

iii) ☐ (a) __________ (b) __________

iv) ☐ (a) __________ (b) __________

v) ☐ __________

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) ____________________

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli **giustificando** brevemente i passaggi svolti.
ATTENZIONE: Non è necessario svolgere tutti i calcoli fino in fondo.

Esercizio 1. (PER IL COMPITO INTERO) Al gioco del lotto Alberto scommette puntando sull'ambo $\{3, 27\}$ sulla ruota di Roma e sulla quaterna $\{5, 27, 61, 83\}$ sulla ruota di Torino.

i) * Calcolare la probabilità p_A che ha Alberto di vincere entrambe le scommesse.

ii) * Calcolare la probabilità q_A che ha Alberto di vincere almeno una delle scommesse.

iii) * **Sapendo che Alberto ha vinto almeno una delle due scommesse**, calcolare la probabilità che sia uscito l'ambo $\{3, 27\}$ sulla ruota di Roma.

Benedetto invece scommette puntando sull'ambo $\{3, 27\}$ e sulla quaterna $\{5, 27, 61, 83\}$ entrambe sulla ruota di Roma.

iv) Calcolare la probabilità p_B che ha Benedetto di vincere entrambe le scommesse.

v) Calcolare la probabilità q_B che ha Benedetto di vincere almeno una delle scommesse.

vi) **Sapendo che Benedetto ha vinto almeno una delle due scommesse**, calcolare la probabilità che sia uscito l'ambo $\{3, 27\}$ sulla ruota di Roma.

SOLUZIONI

i) * Calcolare la probabilità p_A che ha Alberto di vincere entrambe le scommesse.

Posto

$A_R = \{$escono il 3 e il 27 sulla ruota di Roma$\}$, $\qquad Q_T = \{$escono il 5, il 27, il 61 e l'83 sulla ruota di Torino$\}$

si ha

$$p_A = P(A_R \cap Q_T) = P(A_R)P(Q_T) = \frac{\binom{2}{2}\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} \cdot \frac{\binom{4}{4}\binom{86}{1}}{\binom{90}{5}} = \frac{5 \cdot 4}{90 \cdot 89} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}$$

Infatti la probabilità p_A è il prodotto delle probabilità di fare ambo sulla ruota di Roma e quaterna sulla ruota di Torino, in quanto si tratta di estrazioni da urne diverse e quindi gli eventi A_R e Q_T sono indipendenti. Inoltre per calcolare $P(A_R)$ basta osservare che si tratta di 5 estrazioni senza reinserimento da un'urna che contiene 90 palline, di cui 2 bianche (il 3 e il 27) e le rimanenti 88 rosse. Analogamente per il calcolo di $P(Q_T)$ basta osservare che si tratta di 5 estrazioni senza reinserimento da un'urna che contiene 90 palline, di cui 4 bianche (il 5, il 27, il 61 e l'83) e le rimanenti 86 rosse.

ii) * Calcolare la probabilità q_A che ha Alberto di vincere almeno una delle scommesse.

Per la formula di inclusione ed esclusione

$$q_A = P(A_R \cup Q_T) = P(A_R) + P(Q_T) - P(A_R \cap Q_T)$$

e quindi

$$q_A = \frac{\binom{2}{2}\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} + \frac{\binom{4}{4}\binom{86}{1}}{\binom{90}{5}} - \frac{\binom{2}{2}\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} \cdot \frac{\binom{4}{4}\binom{86}{1}}{\binom{90}{5}} = \frac{5 \cdot 4}{90 \cdot 89} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87} - \frac{5 \cdot 4}{90 \cdot 89} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}$$

iii) * **Sapendo che Alberto ha vinto almeno una delle due scommesse**, calcolare la probabilità che sia uscito l'ambo $\{3, 27\}$ sulla ruota di Roma.

Si tratta di calcolare

$$P(A_R|A_R \cup Q_T) = \frac{P\big(A_R \cap (A_R \cup Q_T)\big)}{P(A_R \cup Q_T)} = \frac{P(A_R)}{P(A_R \cup Q_T)} = \frac{\frac{\binom{2}{2}\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}}}{q_A} = \frac{\frac{\binom{2}{2}\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}}}{\frac{\binom{2}{2}\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} + \frac{\binom{4}{4}\binom{86}{1}}{\binom{90}{5}} - \frac{\binom{2}{2}\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} \cdot \frac{\binom{4}{4}\binom{86}{1}}{\binom{90}{5}}}$$

$$\left(= \frac{\binom{2}{2}\binom{88}{3}}{\binom{2}{2}\binom{88}{3} + \binom{4}{4}\binom{86}{1} - \binom{2}{2}\binom{88}{3} \cdot \frac{86}{\binom{90}{5}}} = \frac{88 \cdot 87 \cdot 86/6}{88 \cdot 87 \cdot 86/6 + 86 - 88 \cdot 87 \cdot 86/6 \cdot \frac{86 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}} \right.$$

$$\left. = \frac{44 \cdot 29 \cdot 86}{44 \cdot 29 \cdot 86 + 86 - \frac{86 \cdot 5 \cdot 4}{90 \cdot 89}} = \frac{44 \cdot 29}{44 \cdot 29 + 1 - \frac{5 \cdot 4}{90 \cdot 89}} \right)$$

iv) Calcolare la probabilità p_B che ha Benedetto di vincere entrambe le scommesse.

Posto

$A_R = \{$escono il 3 e il 27 sulla ruota di Roma$\}$, $\qquad Q_R = \{$escono il 5, il 27, il 61 e l'83 sulla ruota di Roma$\}$

e

$$C_R = \{\text{escono il 3, il 5, il 27, il 61 e l'83 sulla ruota di Roma}\}$$

si ha

$$p_A = P(A_R \cap Q_R) = P(C_R) = \frac{\binom{5}{5}\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}$$

Infatti $A_R \cap Q_R = C_R$: effettuare sia l'ambo che la quaterna sulla ruota di Roma equivale ad effettuare la cinquina $\{3, 5, 27, 61, 83\}$ e per calcolare la probabilità di cinquina sulla ruota di Roma basta osservare che si tratta di 5 estrazioni senza reinserimento da un'urna che contiene 90 palline, di cui 5 bianche (il 3, il 5, il 27, il 61 e l'83) e le rimanenti 85 rosse.

v) Calcolare la probabilità q_B che ha Benedetto di vincere almeno una delle scommesse.

Per la formula di inclusione ed esclusione

$$q_B = P(A_R \cup Q_R) = P(A_R) + P(Q_R) - P(A_R \cap Q_R) = P(A_R) + P(Q_R) - P(C_R)$$

e quindi

$$q_B = \frac{\binom{2}{2}\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} + \frac{\binom{4}{4}\binom{86}{1}}{\binom{90}{5}} - \frac{\binom{5}{5}\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}} = \frac{5 \cdot 4}{90 \cdot 89} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87} - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}$$

vi) **Sapendo che Benedetto ha vinto almeno una delle due scommesse**, calcolare la probabilità che sia uscito l'ambo $\{3, 27\}$ sulla ruota di Roma.

Si tratta di calcolare

$$P(A_R|A_R \cup Q_R) = \frac{P\big(A_R \cap (A_R \cup Q_R)\big)}{P(A_R \cup Q_R)} = \frac{P(A_R)}{P(A_R \cup Q_R)} = \frac{\frac{\binom{2}{2}\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}}}{q_B} = \frac{\frac{\binom{2}{2}\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}}}{\frac{\binom{2}{2}\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} + \frac{\binom{4}{4}\binom{86}{1}}{\binom{90}{5}} - \frac{\binom{5}{5}\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}}}$$

$$= \frac{\binom{2}{2}\binom{88}{3}}{\binom{2}{2}\binom{88}{3} + \binom{4}{4}\binom{86}{1} - \binom{5}{5}\binom{85}{0}} \left(= \frac{88 \cdot 87 \cdot 86/6}{88 \cdot 87 \cdot 86/6 + 86 - 1} = \frac{44 \cdot 29 \cdot 86}{44 \cdot 29 \cdot 86 + 85} = 0,999226 \right)$$

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) ____________________

Esercizio 2. (PER IL COMPITO INTERO E LA II PROVA IN ITINERE)
Una fabbrica produce apparecchi di grande precisione: i pezzi sono distinti in pezzi di alta qualità, di media qualità e guasti. Ciascun pezzo è guasto, di alta qualità o di media qualità indipendentemente gli uni dagli altri: con probabilità di guasto p_g pari all'1 per mille, probabilità di alta qualità p_a pari al 90 per cento. In un giorno ne vengono prodotti 500.

i) * Calcolare valore atteso e varianza del numero di apparecchio guasti.

ii) * Calcolare (basta scrivere l'espressione) la probabilità che in un giorno prefissato ci siano al massimo 2 apparecchi guasti.

iii) Utilizzando l'approssimazione di Poisson, calcolare approssimativamente la probabilità che in un giorno prefissato ci siano al massimo 2 guasti.

iv) Calcolare (basta scrivere l'espressione) la probabilità che in un giorno prefissato ci siano esattamente 2 apparecchi guasti, e 470 apparecchi di alta qualità.

v) Scrivere un'espressione approssimata per la probabilità che in un anno ci siano almeno k apparecchi guasti.

SOLUZIONI

i) * Calcolare valore atteso e varianza del numero di apparecchi guasti.

Posto X il numero di apparecchi guasti prodotti in un giorno, si ha

$$E(X) = 500\,\frac{1}{1000} = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad Var(X) = 500\,\frac{1}{1000}\,\frac{999}{1000} = \frac{999}{2000}.$$

Infatti sappiamo che $X \sim Bin(500, 1/1000)$, ossia X è una variabile aleatoria binomiale di parametri $n = 500$ e $p = p_g = 1/1000$, in quanto gli apparecchi possono essere guasti indipendentemente gli uni dagli altri e tutti con la stessa probabilità: siamo cioè in uno schema di Bernoulli, con 500 prove ripetute e indipendenti e X conta il numero di successi sulle 500 prove, dove *i-simo successo* equivale a *l'i-simo apparecchio prodotto è guasto.* Inoltre sappiamo che, per $X \sim Bin(n,p)$, si ha

$$E(X) = np = 500\,\frac{1}{1000} = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad Var(X) = np(1-p) = 500\,\frac{1}{1000}\,\frac{999}{1000} = \frac{999}{2000}.$$

ii) * Calcolare (basta scrivere l'espressione) la probabilità che in un giorno prefissato ci siano al massimo 2 apparecchi guasti.

Si tratta di calcolare

$$\begin{aligned} P(X \le 2) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\ &= \binom{500}{0}\Big(\frac{1}{1000}\Big)^0\Big(\frac{999}{1000}\Big)^{500} + \binom{500}{1}\Big(\frac{1}{1000}\Big)^1\Big(\frac{999}{1000}\Big)^{499} + \binom{500}{2}\Big(\frac{1}{1000}\Big)^2\Big(\frac{999}{1000}\Big)^{498} \end{aligned}$$

in quanto per una variabile aleatoria binomiale $X \sim Bin(n,p)$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, .., n$$

iii) Utilizzando l'approssimazione di Poisson, calcolare approssimativamente la probabilità che in un giorno prefissato ci siano al massimo 2 guasti.

Sappiamo che l'approssimazione di Poisson si usa quando $X \sim Bin(n,p)$, n è grande e p piccola, k non troppo grande, e se $\lambda := np$ non è troppo grande (empiricamente deve essere $\lambda \le 10$) e assicura che

$$P(X=k) \simeq \frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda},$$

Nel nostro caso

$$n = 500, \qquad k = 0, 1, 2, \qquad \text{e} \qquad \lambda = np = 500\,\frac{1}{1000} = \frac{1}{2}$$

e quindi possiamo affermare che

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \simeq \sum_{k=0}^{2} \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}$$
$$= \frac{(1/2)^0}{0!}\, e^{-1/2} + \frac{(1/2)^1}{1!}\, e^{-1/2} + \frac{(1/2)^2}{2!}\, e^{-1/2} = \big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\big)\, e^{-1/2} = \frac{13}{8}\, e^{-1/2}.$$

iv) Calcolare (basta scrivere l'espressione) la probabilità che in un giorno prefissato ci siano esattamente 2 apparecchi guasti, e 470 apparecchi di alta qualità.

Fissato un gionro e posto $X_G = X$ il numero di apparecchi guasti prodotti in quel giorno, X_A il numero di apparecchi di alta qualità prodotti in quel giorno e infine X_M il numero di apparecchi di media qualità prodotti in quel giorno, si tratta di calcolare

$$P(X_G = 2,\, X_A = 470) = P(X_G = 2,\, X_A = 470,\, X_M = 28) = \frac{500!}{2!\,470!\,28!}(p_g)^2(p_a)^{470}(p_m)^{28}$$
$$= \frac{500!}{2!\,470!\,28!}\left(\frac{1}{1000}\right)^2\left(\frac{900}{1000}\right)^{470}\left(\frac{99}{1000}\right)^{28}.$$

Infatti si tratta di $n = 500$ prove indipendenti a tre esiti (guasto, alta qualità e media qualità) con

$$p_g = \frac{1}{1000}, \quad p_a = \frac{90}{100} = \frac{900}{1000} \quad \text{e} \quad p_m = 1 - (p_g + p_a) = \frac{99}{1000},$$

e se $X_G = 2$ e $X_A = 470$, allora necessariamente $X_M = 28$ e si usano quindi le probabilità multinomiali: infatti per ogni esito favorevole all'evento $\{X_G = 2,\, X_A = 470,\, X_M = 28\}$, e in cui si fissa quali sono i 2 apparecchi guasti e i 470 di alta qualità (e quindi i rimanenti 28 di media qualità), la probabilità di tale esito è $(p_g)^2(p_a)^{470}(p_m)^{28}$, e inoltre ci sono

$$\binom{500}{2}\cdot\binom{498}{470} = \frac{500!}{2!\,498!}\cdot\frac{498!}{470!\,28!} = \frac{500!}{2!\,470!\,28!}$$

modi di fissare quali sono i 2 apparecchi guasti e i 470 di alta qualità (e quindi i rimanenti 28 di media qualità).

v) Scrivere un'espressione approssimata per la probabilità che in un anno ci siano almeno k apparecchi guasti.

Posto $S = X_1 + ... + X_{365}$, dove X_i rappresenta il numero di apparecchi guasti prodotti in un giorno (o equivalentemente $S = \sum_{i=1} 500 \cdot 365\xi_i = \sum_{i=1}^{182500} \xi_i$, dove ξ_i rappresenta la funzione indicatrice $\xi_i = 1$ se l'i-simo apparecchio prodotto è guasto e $\xi_i = 0$ altrimenti), si tratta di calcolare **approssimativamente**

$$P(S \geq k).$$

In ogni caso S è una variabile aleatoria binomiale di parametri $n = 500 \cdot 365 = 182500$ 3 $p = p_g = 1/1000$, con $E(S) = 365\,\frac{1}{2} = 182500\,\frac{1}{1000} = 182,5$ e $Var(S) = 365\,\frac{999}{2000} = 182500\,\frac{1}{1000}\,\frac{999}{1000} = 182,5\,\frac{999}{1000}$.

TUTTAVIA non possiamo adoperare l'approssimazione di Poisson in quanto il valore $np = 182500/1000 = 182,5$ è troppo grande. Possiamo però adoperare l'**approssimazione normale**, in quanto S è la somma di variabili aleatorie indipendenti e tutte con la stessa distribuzione, per cui

$$P(S \geq k) = P\left(\frac{S - E(S)}{Var(S)} \geq \frac{k - E(S)}{\sqrt{Var(S)}}\right) = P\left(S^* \geq \frac{k - 182,5}{\sqrt{182,5\,\frac{999}{1000}}}\right) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{k - 182,5}{\sqrt{182,5\,\frac{999}{1000}}}\right).$$

OSSERVAZIONE: una approssimazione leggermente migliore si potrebbe trovare considerando che

$$P(S \geq k) = P(S > k - \frac{1}{2}) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{k - 0,5 - 182,5}{\sqrt{182,5\,\frac{999}{1000}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{k - 183}{\sqrt{182,5\,\frac{999}{1000}}}\right).$$

Laurea triennale in INFORMATICA, Corso di **CALCOLO DELLE PROBABILITÀ**

Prof. G. Nappo – COMPITO INTERO e SECONDA PROVA IN ITINERE 11 GIUGNO 2012

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) ______________________________

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli **giustificando** brevemente i passaggi svolti.

ATTENZIONE: Svolgere tutti i calcoli fino in fondo.

Esercizio 3. (PER IL COMPITO INTERO E LA II PROVA IN ITINERE)
Siano U e V due variabili aletorie a valori in $\{0,+1,+2\}$ tali che

$$P(U=0,V=i)=P(U=2,V=i)=c, \quad \text{e} \quad P(U=+1,V=i)=2c, \quad \text{per} \quad i=0,+1,+2$$

i) ∗ Calcolare c.

ii) ∗ Calcolare la densità discreta di U e il suo valore atteso e la sua varianza.

iii) (a) Calcolare $Cov(U,V)$. (b) Le variabili aleatorie U e V sono indipendenti?

iv) Calcolare (a) la probabilità che $U+V$ sia minore o uguale a 2 e (b) la probabilità che $U=1$ dato che $U+V$ è minore o uguale a 2.

v) Posto $X=U+V$, trovare un valore di ε tale che la minorazione per $P(|X-E(X)|\leq\varepsilon)$ ottenuta con la disuguaglianza di Chebyshev sia strettamente positiva.

SOLUZIONI

i) ∗ Calcolare c.

La costante $c=1/12$ infatti la somma

$$1=\sum_{h=0,1,2}\sum_{i=0,1,2}P(U=h,\,V=i)=\sum_{i=0,1,2}P(U=0,\,V=i)+\sum_{i=0,1,2}P(U=1,\,V=i)+\sum_{i=0,1,2}P(U=2,\,V=i)$$
$$=3c+6c+3c=12c.$$

ii) ∗ Calcolare la densità discreta di U e il suo valore atteso e la sua varianza.

La variabile aleatoria U assume i valori 0, 1, 2 con

$$P(U=0)=P(U=2)=\frac{1}{4}, \quad \text{e} \quad P(U=1)=\frac{1}{2}$$

Infatti

$$P(U=0)=\sum_{i=0,1,2}P(U=0,V=i)=3c=3/12=1/4, \quad P(U=2)=\sum_{i=0,1,2}P(U=2,V=i)=3c=3/12=1/4,$$

e

$$P(U=1)=\sum_{i=0,1,2}P(U=+1,V=i)=6c=6/12=1/2, \quad (\text{e del resto} \quad P(U=1)=1-P(U=0)-P(U=2),$$

oppure considerando la tabella

$V\diagdown U$	**0**	**1**	**2**	$p_V(i)=P(V=i)$
0	$c=1/12$	$2c=1/6$	$c=1/12$	$P(V=0)=4c=1/3$
1	$c=1/12$	$2c=1/6$	$c=1/12$	$P(V=1)=4c=1/3$
2	$c=1/12$	$2c=1/6$	$c=1/12$	$P(V=2)=4c=1/3$
$p_U(h)=P(U=h)$	$P(U=0)=3c=1/4$	$P(U=1)=6c=1/2$	$P(U=2)=3c=1/4$	1

Quindi

$$E(U) = \sum_{h=0,1,2} h\, P(U=h) = 0\,\frac{1}{4} + 1\,\frac{1}{2} + 2\,\frac{1}{4} = 1,$$

e

$$Var(U) := E\big[\big(U - E(U)\big)^2\big] = E(U^2) - \big(E[U]\big)^2 = \sum_{h=0,1,2} h\, P(U=h) = 0^2\,\frac{1}{4} + 1^2\,\frac{1}{2} + 2^2\,\frac{1}{4} - 1^2 = \frac{1}{2}.$$

iii) (a) Calcolare $Cov(U,V)$. (b) Le variabili aleatorie U e V sono indipendenti?

(a) $Cov(U,V) = 0$ infatti, tenendo conto che $E[V] = 1$ (come si deduce immediatamente osservando che la variabile aleatoria V è uniforme su $\{0,1,2\}$)

$$\begin{aligned}
Cov(U,V) &:= E\big[\big(U - E(U)\big)\big(V - E(V)\big)\big] = E(UV) - E[U]E[V] = \sum_{h=0,1,2}\sum_{i=0,1,2} h\cdot i\, P(U=h,\, V=i) - 1\cdot 1 \\
&= 1\cdot 1P(U=1,V=1) + 1\cdot 2P(U=1,V=2) + 2\cdot 1P(U=2,V=1) + 2\cdot 2P(U=2,V=2) - 1 \\
&= 1\,2c + 2\,2c + 2\,c + 4\,c - 1 = 12c - 1 = 0,
\end{aligned}$$

(si noti che abbiamo usato il fatto che se $g(x,y)$ è una funzione deterministica ed X,Y sono due variabili aleatorie discrete, allora

$$E[g(X,Y)] = \sum_k \sum_h g(x_k, y_h)\, p_{X,Y}(x_k, y_h) = \sum_k \sum_h g(x_k, y_h)\, P(X = x_k, Y = y_h)$$

NON E' STATO quindi necessario calcolare la densità discreta di $Z = UV$ e poi calcolare il suo valore atteso)

OSSERVAZIONE Alla stessa conclusione si poteva arrivare osservando che effettivamente le due variabili aleatorie sono INDIPENDENTI (vedi punto (b)) e quindi necessariamente sono NON CORRELATE, ossia $Cov(U,V) = 0$ (tuttavia si ricordi che il viceversa non è vero: ossia ci sono esempi di variabili aleatorie non correlate, ma che NON SONO INDIPENDENTI)

(b) Le variabili aleatorie U e V sono indipendenti, infatti si verifica che per ogni h e i

$$P(U=h, V=i) = P(U=h)P(V=i)$$

e infatti, per $h = 0$

$$1/12 = P(U=0, V=i) = P(U=0)P(V=i) = (1/4)\cdot(1/3), \qquad \text{per ogni } i = 0,1,2,$$

analogamente, per $h = 2$

$$1/12 = P(U=2, V=i) = P(U=2)P(V=i) = (1/4)\cdot(1/3), \qquad \text{per ogni } i = 0,1,2,$$

e infine, per $h = 1$

$$1/6 = P(U=1, V=i) = P(U=1)P(V=i) = (1/2)\cdot(1/3), \qquad \text{per ogni } i = 0,1,2.$$

iv) Calcolare (a) la probabilità che $U+V$ sia minore o uguale a 2 e (b) la probabilità che $U = 1$ dato che $U+V$ è minore o uguale a 2.

(a)

$$\begin{aligned}
P(U+V \le 2) &= P(U=0,V=0) + P(U=0,V=1) + P(U=0,V=2) + P(U=1,V=0) + P(U=1,V=1) + P(U=2,V=0) \\
&= 3c + 2\,2c + c = 8c = 8/12 = 2/3
\end{aligned}$$

Alternativamente

$$\begin{aligned}
P(U+V \le 2) &= 1 - P(U+V > 2) = 1 - \big(P(U=1,V=2) + P(U=2,V=1) + P(U=2,V=2)\big) \\
&= 1 - (2c + c + c) = 1 - 4c = 1 - 4/12 = 1 - 1/3 = 2/3
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
P(U=1 | U+V \le 2) &= \frac{P(U=1, U+V \le 2)}{P(U+V \le 2)} = \frac{P(U=1,V=0) + P(U=1,V=1)}{P(U+V \le 2)} \\
&= \frac{2\,2c}{3c + 2\,2c + c} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

v) Posto $X = U + V$, trovare un valore di ε tale che la minorazione per $P(|X - E(X)| \leq \varepsilon)$ ottenuta con la disuguaglianza di Chebyshev sia strettamente positiva.

Basta prendere

$$\varepsilon > \sqrt{7/6}$$

ad esempio

$$\varepsilon = 7/6.$$

Infatti, dalla disuguaglianza di Chebyshev sappiamo che

$$P(|X - E(X)| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{Var(X)}{\varepsilon^2} > 0, \qquad \text{per } \varepsilon > 0$$

se e solo se

$$1 > \frac{Var(X)}{\varepsilon^2} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon^2 > VarX \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon > \sqrt{VarX} \quad (\text{in quanto } \varepsilon > 0$$

ora basta osservare che

$$Var(X) = Var(U + V) = Var(U) + Var(V) + 2Cov(U, V) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

in quanto

$$Var(V) = E[(V-1)^2] = (-1)^2 P(V = 0) + (1-1)^2 P(V = 1) + (2-1)^2 P(V = 2) = (-1)^2 \frac{1}{3} + (1-1)^2 \frac{1}{3} + (2-1)^2 \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Attenzione: poiché $E(X) = E(U + V) = E(U) + E(V) = 1 + 1+ = 2$ e X assume solo i valori $0, 1, 2, 3, 4$, e quindi $X - E(X) = X - 2$ assume solo i valori $0, \pm 1, \pm 2$, prendere $\varepsilon \geq 2$ è poco interessante in quanto in tale caso $P(|X - E(X)| \leq \varepsilon) \geq P(|X - E(X)| \leq 2) = 1$