

LEZIONI CALCOLO DELLE PROBABILITA' (INFORMATICA) a.a. 2012-13

1) mercoledì 27 febbraio 2013

prima introduzione e prime definizioni

- perché si usa un insieme Ω (Omega) e corrispondenza tra insiemi ed eventi.

Esempi: lancio di una moneta, (di un dado), tiro a segno, estrazione di una carta da un mazzo di carte italiane

(mazzo di carte italiane: 4 semi, cioè Denari, Coppe, Bastoni, Spade; ogni seme ha 10 carte numerate da 1 a 10,

con 1= asso, 8= fante, 9=cavallo, 10=re)

Ad ogni evento corrisponde un sottoinsieme E di Ω (Omega) .

L'insieme Ω (Omega) è in corrispondenza con l'evento certo, ed è anche detto **evento certo**.

L'insieme vuoto $\emptyset$ è in corrispondenza con l'evento impossibile, ed è anche detto **evento impossibile**.

LA PROBABILITA' NON ESISTE (de Finetti):

nel senso che la non esiste senza che ci sia qualcuno che la VALUTA

e DIPENDE dallo stato di informazione di chi la valuta.

Esempio dell'estrazione di una carta da un mazzo di carte: se riteniamo che il mazzo sia ben mescolato, e non ci siano trucchi,

allora valutiamo entrambi la probabilità che "venga estratto l'asso di bastoni" come $1/40$,

ma se, ad esempio, io guardo la carta, ma voi no, e vi dico è una carta di bastoni, voi valutate $1/10$ la probabilità di questo evento

mentre per me tale probabilità può valere 0 o 1 (dipende dal valore della carta estratta)

Operazioni tra eventi e tra insiemi

AND corrisponde a "e", "si verificano contemporaneamente entrambi gli eventi" e dal punto di vista insiemistico corrisponde all'INTERSEZIONE

OR corrisponde all'"oppure", "almeno uno dei due eventi si verifica" e dal punto di vista insiemistico corrisponde all'UNIONE

NOT corrisponde a "l'evento non si verifica" e dal punto di vista insiemistico corrisponde al COMPLEMENTARE

Ossia se E ed F sono due sottoinsiemi che rappresentano due eventi allora

all'evento "si verificano contemporaneamente entrambi gli eventi rappresentati da E e da F " corrisponde $E \cap F$ (E intersezione F)

all'evento "si verifica almeno uno tra gli eventi rappresentati da E e da F " corrisponde $E \cup F$ (E unione F)

all'evento "non si verifica l'evento rappresentato da E " corrisponde l'evento $E^c = E^c$ (complementare di E)

Alcune proprietà delle probabilità, per analogia con il caso in cui si contano i casi favorevoli diviso i casi possibili

$P(\Omega) = 1$, $P(E^c) = 1 - P(E)$, se E ed F sono eventi incompatibili (sarebbe più giusto dire che E ed F rappresentano eventi incompatibili)

cioè non si possono verificare contemporaneamente (è impossibile che si verifichino entrambi)

ossia $E \cap F = \emptyset$, allora $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$

Problema del compleanno (esperimento)

Date N persone in una stanza, quanto vale la probabilità che almeno due siano nate nello stesso giorno?

Per iniziare per evitare casi banali ho chiesto se ci fossero coppie di gemelli in aula, ma non c'erano,
e successivamente se ci fosse qualcuno nato il 29 febbraio, ma nessuno era nato quel giorno, questo per semplificare il modello.
Ho stabilito un ordine agli studenti in aula e abbiamo fatto l'esperimento:
rapidamente abbiamo scoperto che c'erano almeno due nati lo stesso giorno.

2) venerdì 1 marzo

Partendo dal problema del compleanno:

Dato un insieme I di cardinalità n , cioè con n elementi (senza ledere in generalità si può pensare $I = \{1, 2, \dots, n-1, n\}$)

una Disposizione con ripetizione di n elementi di classe k è una k -pla ordinata $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ con $i_1, i_2, \dots, i_k$ appartenenti all'insieme I

una Combinazione [senza ripetizione] di n elementi di classe k è un modo di scegliere k elementi **tutti distinti** dall'insieme I , senza tenere conto dell'ordine

(ATTENZIONE k deve essere minore o uguale a n) corrisponde a un sottoinsieme di I di cardinalità k e viene indicata con $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$

una Disposizione [senza ripetizione] di n elementi di classe k è una k -pla ordinata $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ con $i_1, i_2, \dots, i_k$ **tutti distinti** e appartenenti all'insieme I

(ATTENZIONE k deve essere minore o uguale a n)

una Permutazione di k elementi (= una Disposizione di k elementi di classe k)

$C^n_k * P_k = D^n_k$ ossia

il numero delle disposizioni di n elementi di classe k (indicato con D^n_k) è uguale

al numero delle combinazioni di n elementi di classe k [senza ripetizione] (indicato con C^n_k)

moltiplicato per il numero delle permutazioni di k elementi (ossia il numero delle disposizioni, con $n=k$, indicato con $P_k = D^k_k$)

D'altra parte è facile convincersi che $D^n_k = n D^{n-1}_{k-1} = n(n-1) \dots (n-(k-1)) = n! / (n-k)!$ e che $P_k = D^k_k = k!$

da cui si dimostra che $C^n_k = n! / [(n-k)! k!]$

Interpretazione di $C^n_k = C^n_{n-k}$

(la corrispondenza biunivoca che ai sottoinsiemi di A associa $A^c = A^c$ fa capire che il numero di sottoinsiemi di cardinalità k è uguale al numero di sottoinsiemi di cardinalità $n-k$)

Dimostrazione di $C^n_k = C^{n-1}_k + C^{n-1}_{k-1}$:

Possiamo dividere le combinazioni di n elementi di classe k (che sono sottoinsiemi di I di cardinalità k) in due famiglie: i sottoinsiemi che **NON** contengono n e quindi sono sottoinsiemi di $\{1, 2, \dots, n-1\}$ di cardinalità k (e sono quindi C^{n-1}_k) e i sottoinsiemi A che contengono n e quindi si possono scrivere come

$A = A' \cup \{n\}$, dove A' è un sottoinsieme di $\{1, 2, \dots, n-1\}$ di cardinalità $k-1$, e quindi sono in tutto C^{n-1}_{k-1}

Basta infine osservare che ogni combinazione di n elementi di classe k appartiene a una e una sola di queste due famiglie per ottenere la formula da dimostrare

Uso della formula ($C^n_k = C^{n-1}_k + C^{n-1}_{k-1}$, insieme a $C^n_0 = C^n_n = 1$) per la costruzione del triangolo di Tartaglia e calcolo dei coefficienti binomiali

Alcuni esempi di applicazione (estrazione di carte) lancio di due dadi

3) lunedì 4 marzo 2013

Funzioni indicatrici di eventi, cardinalità dell'insieme delle parti, e dimostrazione di $2^n = C^0_n + C^1_n + \dots + C^k_n + \dots + C^n_n$

1) L'insieme $\mathcal{P}(I)$ delle parti di un insieme I di cardinalità n ha cardinalità 2^n

(per dimostrarlo basta mettere in corrispondenza biunivoca ogni sottoinsieme J contenuto in I con la sua funzione indicatrice

e quest'ultima con la n -pla ordinata di 0 (zeri) e di 1:

la funzione 1_J è definita come segue:

$1_J(x) = 0$ se x non appartiene a J mentre $1_J(x) = 1$ se x appartiene a J ,

in altre parole, se ad esempio $I = \{a, b, c, d, e\}$ e $J = \{a, c, d\}$ allora $1_J(a) = 1$, $1_J(b) = 0$, $1_J(c) = 1$, $1_J(d) = 1$, $1_J(e) = 0$

che è in corrispondenza biunivoca con la 5-pla ordinata $(1, 0, 1, 1, 0)$

Viceversa data una 5-pla ordinata di 0 e 1, ad esempio a $(0, 0, 1, 1, 0)$ è associato l'insieme $\{c, d\}$

Quindi l'insieme delle parti è in corrispondenza biunivoca con le disposizioni con ripetizione di due elementi (ossia 0 e 1) di classe n ,

e perciò ha cardinalità 2^n .

2) L'insieme delle parti è si può dividere in classi $C_0, C_1, \dots, C_k, \dots, C_n$ di sottoinsiemi, ciascuna classe composta di sottoinsiemi tutti con la stessa cardinalità:

C_0 quella composta dall'insieme vuoto, che è l'unico sottoinsieme con 0 elementi

C_1 quella composta dai singoletti (singleton) ossia insiemi di un solo elemento (che sono $n = C^1_n$)

...

C_k quella composta di sottoinsiemi di cardinalità k (che sono C^k_n)

...

C_n quella composta dall'insieme stesso, cioè di cardinalità n (ed è composta da un solo insieme, l'insieme stesso) ($C^n_n = 1$)

Mettendo insieme i punti 1) e 2) si ottiene la tesi in quanto

$$2^n = |\mathcal{P}(I)| = |C_0| + |C_1| + \dots + |C_k| + \dots + |C_n| = C^0_n + C^1_n + \dots + C^k_n + \dots + C^n_n$$

Tale formula corrisponde al caso $x=y=1$ nella formula del binomio di Newton

$$(x+y)^n = C^0_n x^n y^0 + C^1_n x^{n-1} y^1 + \dots + C^k_n x^{n-k} y^k + \dots + C^n_n x^0 y^n = \sum_{k=0,1,\dots,n} C^k_n x^{n-k} y^k$$

Idea della dimostrazione senza induzione della stessa formula, nel caso $n=4$

cominciamo con lo svolgere il prodotto

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)(x_3 + y_3)(x_4 + y_4)$$

è la somma di tutti i prodotti con 4 fattori in cui compaiono

come primo fattore o x_1 o y_1 , come secondo fattore o x_2 o y_2 , come terzo fattore o x_3 o y_3 e infine come quarto fattore o x_4 o y_4 , ossia

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)(x_3+y_3)(x_4+y_4)=$$

$$= y_1 y_2 y_3 y_4 \quad (\text{corrisponde alla scelta di } \emptyset \text{ in } C^4_0 \text{ modi})$$

$$+ x_1 y_2 y_3 y_4 + y_1 x_2 y_3 y_4 + y_1 y_2 x_3 y_4 + y_1 y_2 y_3 x_4$$

(corrisponde alla scelta di $\{1\}, \{2\}, \{3\} \{4\}$, in C^4_1 modi)

$$+ x_1 x_2 y_3 y_4 + x_1 y_2 x_3 y_4 + x_1 y_2 y_3 x_4 + y_1 x_2 x_3 y_4 + y_1 x_2 y_3 x_4 + y_1 y_2 x_3 x_4$$

(corrisponde alla scelta di $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\} \{2,3\}, \{2,3\} \{3,4\}$, in C^4_2 modi)

$$+ x_1 x_2 x_3 y_4 + x_1 x_2 y_3 x_4 + x_1 y_2 x_3 x_4 + y_1 x_2 x_3 x_4$$

(corrisponde alla scelta di $\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\} \{2,3,4\}$, in C^4_3 modi)

$$+ x_1 x_2 x_3 x_4 \quad (\text{corrisponde alla scelta di } \{1,2,3,4\}, \text{ in } C^4_4 \text{ modi})$$

Quando gli x_i sono tutti uguali a x e gli y_i sono tutti uguali a y si ottiene

$$(x+y)^4 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$$

$$y_1 y_2 y_3 y_4 = y^4 = C^4_0 x^0 y^4 \quad (\text{corrisponde alla scelta di } \emptyset \text{ in } C^4_0 \text{ modi})$$

$$x_1 y_2 y_3 y_4 + y_1 x_2 y_3 y_4 + y_1 y_2 x_3 y_4 + y_1 y_2 y_3 x_4 = C^4_1 x^1 y^3$$

(corrisponde alla scelta di $\{1\}, \{2\}, \{3\} \{4\}$, in C^4_1 modi)

$$x_1 x_2 y_3 y_4 + x_1 y_2 x_3 y_4 + x_1 y_2 y_3 x_4 + y_1 x_2 x_3 y_4 + y_1 x_2 y_3 x_4 + y_1 y_2 x_3 x_4 = C^4_2 x^2 y^2$$

(corrisponde alla scelta di $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\} \{2,3\}, \{2,3\} \{3,4\}$, in C^4_2 modi)

$$x_1 x_2 x_3 y_4 + x_1 x_2 y_3 x_4 + x_1 y_2 x_3 x_4 + y_1 x_2 x_3 x_4 = C^4_3 x^3 y^1$$

(corrisponde alla scelta di $\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\} \{2,3,4\}$, in C^4_3 modi)

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x^4 = C^4_4 x^4 y^0 \quad (\text{corrisponde alla scelta di } \{1,2,3,4\}, \text{ in } C^4_4 \text{ modi})$$

e quindi

$$(X+y)^4 = C^4_0 x^0 y^4 + C^4_1 x^1 y^3 + C^4_2 x^2 y^2 + C^4_3 x^3 y^1 + C^4_4 x^4 y^0$$

ESERCIZIO PROPOSTO

usare la proprietà $C^n_k = C^{n-1}_{k-1} + C^{n-1}_k$ (formula di Stieffel)

per la dimostrazione per induzione della formula del binomio di Newton $(x+y)^n = \sum_{k=0,1,\dots,n} C^n_k x^k y^{n-k}$

ESEMPIO mazzo di carte napoletane, poniamo la seguente corrispondenza

1= Asso di denari, 2= due di denari,.... 10= dieci/re di denari, 11= Asso di coppe, 12= due di coppe,...20=10/re di coppe

21= Asso di bastoni, 22= due di bastoni,.... 30= dieci/re di bastoni, 31= Asso di spade, 32= due di spade,...40=10/re di spade

Mischiamo bene il mazzo: gli esiti possibili sono tutte e sole le permutazioni degli elementi $\{1, 2, \dots, 40\}$

ossia $\Omega = \{(i_1, i_2, \dots, i_{40}) \text{ con } i_k \in \{1, 2, \dots, 40\}, \text{ tutti distinti}\}$

ESERCIZIO descrivere gli insiemi A_1 ed A_2 che corrispondono agli eventi

"la prima carta è un asso" e "la seconda carta è un asso" rispettivamente, e determinarne la cardinalità

SOLUZIONE

$A_1 = \{(i_1, i_2, \dots, i_{40}) \in \Omega, \text{ e tali che } i_1 \in \{1, 11, 21, 31\}\}$

$|A_1| = 4 \times 39!$

infatti, posti $A_{\{1,d\}}, A_{\{1,c\}}, A_{\{1,b\}}, A_{\{1,s\}}$ gli eventi

"la prima carta è l'asso di denari", "la prima carta è l'asso di coppe", "la prima carta è l'asso di bastoni", "la prima carta è l'asso di spade"

si ha

$A_1 = A_{\{1,d\}} \cup A_{\{1,c\}} \cup A_{\{1,b\}} \cup A_{\{1,s\}}$

e $|A_{\{1,d\}}| = |A_{\{1,c\}}| = |A_{\{1,b\}}| = |A_{\{1,s\}}| = 39!$

$A_2 = \{(i_1, i_2, \dots, i_{40}) \in \Omega, \text{ e tali che } i_2 \in \{1, 11, 21, 31\}\}$

$|A_2| = 4 \times 39!$

Questo si può vedere sia ripetendo il ragionamento e introducendo gli eventi $A_{\{2,d\}}, A_{\{2,c\}}, A_{\{2,b\}}, A_{\{2,s\}}$

oppure più semplicemente osservando che A_1 e A_2 sono in corrispondenza biunivoca:

basta scambiare i_1 e i_2 per ottenere da un elemento di A_1 un elemento di A_2 e viceversa.

ESERCIZIO (II parte)

i) Calcolare la probabilità che la prima carta sia un asso e la probabilità che la seconda carta sia un asso

(ATTENZIONE nel chiedere la probabilità che la seconda carta sia un asso, cioè

NON VIENE DETTO NULLA SULLA PRIMA CARTA, cioè non si sa se nulla sul valore della prima carta)

La risposta intuitiva è la probabilità che la prima carta sia un asso è $4/40$ (4 sono gli assi e 40 le carte),

e la probabilità che la seconda carta sia un asso è uguale, cioè sempre $4/40$

SOLUZIONE $P(A_1) = P(A_2) = |A_1|/|\Omega| = |A_2|/|\Omega| = 4 \times 39! / 40! = 4 \times 39! / (40 \times 39!) = 4/40 = 1/10$

ii) Calcolare la probabilità che sia la prima che la seconda carta siano assi

SOLUZIONE

L'evento che ci interessa è $A_1 \cap A_2 = \{ (i_1, i_2, \dots, i_{40}) \in \Omega, \text{ e tali che } i_1, i_2 \in \{1, 11, 21, 31\} \}$

Possiamo scrivere $A_1 \cap A_2$ come l'unione degli eventi

$A_{\{1,d,2,c\}} = \{ (i_1, i_2, \dots, i_{40}) \in \Omega, \text{ e tali che } i_1=1, i_2=11 \} = \{ (1, 11, i_3, i_4, \dots, i_{40}) \in \Omega \}$

$A_{\{1,d,2,b\}} = \{ (i_1, i_2, \dots, i_{40}) \in \Omega, \text{ e tali che } i_1=1, i_2=21 \} = \{ (1, 21, i_3, i_4, \dots, i_{40}) \in \Omega \}$

etc.

Tali eventi hanno ciascuno cardinalità $38!$ e sono $4 \times 3 (=12)$ e quindi

$P(A_1 \cap A_2) = |A_1 \cap A_2| / |\Omega| = 4 \times 3 \times 38! / (40 \times 39 \times 38!) = 4 \times 3 / (40 \times 39) = (4/40) \times (3/39)$

iii) SAPENDO che la prima carta è un asso, calcolare la probabilità che la seconda carta sia un asso

in altre parole

SAPENDO che si è verificato l'evento A_1 , calcolare la probabilità che si verifichi l'evento A_2

in simboli si scrive **$P(A_2 | A_1)$** (a volte anche $P_{A_1}(A_2)$, ma meno spesso, per mettere in evidenza che e' una valutazione della probabilità, valutata sulla base dell'informazione che si è verificato A_1) e si legge **probabilità di A_2 dato A_1 oppure probabilità di A_2 condizionata ad A_1**

La risposta intuitiva è $3/39$: tre casi favorevoli (i tre assi rimasti) diviso i 39 casi possibili (tutti meno la carta uscita)

Si osservi che viene lo stesso risultato facendo il rapporto

$P(A_1 \cap A_2) / P(A_1) = (|A_1 \cap A_2| / |\Omega|) / (|A_1| / |\Omega|) = |A_1 \cap A_2| / |A_1| = 4 \times 3 \times 38! / (4 \times 39!) = 3/39$

Vedremo che questa sarà la definizione di probabilità condizionata

OSSERVAZIONE abbiamo usato l'espressione "che si verifichi l'evento A_2 ", questo è un fatto importante: che va sottolineato: un evento per essere tale deve corrispondere a una proprietà verificabile, ossia si deve essere in grado di decidere se si è verificato oppure no.

Il seguente esempio ci fa capire

- perché non è detto che tutti i sottoinsiemi di Ω (Ω (Omega) siano eventi:

ESEMPIO del dado coperto di bollini rossi sui pari e blu sui dispari:

"esce un numero pari" è un evento, mentre " esce il due " non è un evento perché non posso dire se si è verificato o no, oppure esce un numero minore o uguale a tre non è un evento.

Ancora sul significato delle operazioni logiche di OR, AND e NEGAZIONE e le operazioni di unione, intersezione e complementare, sugli insiemi

4) mercoledì 6 marzo 2013

Assiomi di uno spazio di probabilità e le prime conseguenze

- dato un insieme Ω e data $\mathcal{F}$ un'algebra, o una σ -algebra [si legge sigma-algebra], ossia una famiglia di sottoinsiemi di Ω , $[\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)]$

tale che

1. Ω appartiene a $\mathcal{F}$; (*l'evento certo è un evento*)
2. se A appartiene a $\mathcal{F}$, allora A^c appartiene a $\mathcal{F}$; (*se A è un evento, allora anche il suo complementare è un evento*)
3. se A_i appartiene a $\mathcal{F}$, per $i=1, \dots, n$, allora l'evento $A = \bigcup_{i=1, \dots, n} A_i$ (si verifica almeno uno tra gli eventi $A_1, \dots, A_n$) appartiene a $\mathcal{F}$;
(*se A_i sono eventi allora "si verifica almeno uno tra gli eventi $A_1, \dots, A_n$ " è un evento*)
- 3bis. se A_i appartiene a $\mathcal{F}$, per $i=1, \dots, n$, allora l'evento $A = \bigcap_{i=1, \dots, n} A_i$ (si verificano tutti gli eventi $A_1, \dots, A_n$) appartiene a $\mathcal{F}$;

OSSERVAZIONE: la proprietà 3.bis è sovrabbondante, pleonastica, come segue dalla legge di De Morgan e dalla proprietà 2., infatti:

$$\text{per la legge di De Morgan } \bigcup_{i=1, \dots, n} A_i^c = \left(\bigcap_{i=1, \dots, n} A_i \right)^c$$

(ossia "si verifica almeno uno dei complementari di A_i ", cioè almeno uno degli A_i non si verifica" equivale a "non si verificano tutti gli A_i ")

ed $A = \left(\left(\bigcap_{i=1, \dots, n} A_i \right)^c \right)^c$ è un evento, essendo il complementare di un evento.

ATTENZIONE se al posto di $1, \dots, n$ si considera un'infinità numerabile di eventi, allora si parla di σ -algebra, ossi, quando si considera

3. se A_i appartiene a $\mathcal{F}$, per $i=1, \dots, n, n+1, \dots$, allora l'evento $A = \bigcup_{i=1, \dots} A_i$ (si verifica almeno uno tra gli eventi $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots$) appartiene a $\mathcal{F}$;
- 3bis. se A_i appartiene a $\mathcal{F}$, per $i=1, \dots, n, n+1, \dots$, allora l'evento $A = \bigcap_{i=1, \dots} A_i$ (si verificano tutti gli eventi $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots$) appartiene a $\mathcal{F}$;

una funzione P da $\mathcal{F}$ in $[0,1]$ è una probabilità (o una misura di probabilità) se e solo se

$$P: \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1], A \in \mathcal{F} \rightarrow P(A)$$

è tale che

$$(0 \leq P(A) \leq 1)$$

$$1. P(\Omega) = 1 \quad (\text{normalizzazione})$$

2. se A_i appartiene a $\mathcal{F}$, per $i=1, \dots, n$, incompatibili a due a due (cioè $A_i \cap A_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$), allora

$$P\left(\bigcup_{i=1, \dots, n} A_i\right) = \sum_{i=1, \dots, n} P(A_i) \quad (\text{proprietà di additività finita della probabilità})$$

ATTENZIONE la proprietà 2, negli assiomi di Kolmogorov viene data come segue (nel caso in cui $\mathcal{F}$ è una σ -algebra)

2. se A_i appartiene a $\mathcal{F}$, per $i=1, \dots, n, n+1, \dots$, incompatibili a due a due (cioè $A_i \cap A_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$), allora

$$P\left(\bigcup_{i=1, \dots} A_i\right) = \sum_{i=1, \dots} P(A_i) \quad (\text{proprietà di additività numerabile o } \sigma\text{-additività della probabilità})$$

IN UNO SPAZIO DI PROBABILITA' C'E' POI LA PROBABILITA' CONDIZIONATA

dato un evento B con $P(B) > 0$ si definisce

$$P_B: \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1], A \in \mathcal{F} \rightarrow P_B(A) = P(A|B) := P(A \cap B)/P(B)$$

NOTA BENE, IN REALTA' DOVREMO CONTROLLARE CHE E' UNA PROBABILITA', ossia che $0 \leq P(A|B) \leq 1$, che $P(\Omega|B) = P_B(\Omega) = 1$ e che

$$P_B(\bigcup_{i=1, \dots, n} A_i) = \sum_{i=1, \dots, n} P_B(A_i), \text{ se gli eventi } A_i \text{ sono incompatibili a due a due, ossia } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ per ogni } i \neq j$$

Prime conseguenze degli assiomi delle probabilità

i) $P(\emptyset) = 0$

Dim: Se E è un evento allora $P(E) = P(E \cup \emptyset) = P(E) + P(\emptyset)$ quindi $P(\emptyset) = 0$

ii) Se A è un evento allora $P(A^c) = 1 - P(A)$

Dim: $A \cup A^c = \Omega$ quindi $P(A) + P(A^c) = P(\Omega) = 1$ quindi $P(A^c) = 1 - P(A)$ e $P(A) = 1 - P(A^c)$

iii) Se A e B sono eventi allora $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$ e, ovviamente, $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$

Dim: basta osservare che $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ e scambiare il ruolo di A e di B

iv) Se A è incluso in B ($A \subseteq B$ ossia il verificarsi di A implica il verificarsi di B) allora $P(A) \leq P(B)$

(PROPRIETA' di MONOTONIA DELLA PROBABILITA')

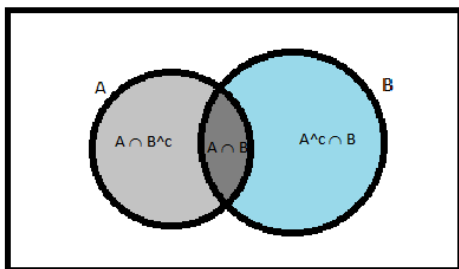
Dim: se A è contenuto in B allora $A \cap B = A$ e quindi $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = P(B) = P(A) + P(A^c \cap B) \geq P(A)$

v) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ **(FORMULA DI INCLUSIONE ED ESCLUSIONE per la probabilità che si verifichi almeno uno di due eventi)**

Dim: $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ da cui $P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B)$

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

Ω



D'altra parte, per il punto iii), si ha $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B) - P(A \cap B) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B)$

vi) **bis** $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

(principio di inclusione ed esclusione per la probabilità che si verifichi almeno uno tra gli eventi A, B e C, ossia $P(A \cup B \cup C)$, con dimostrazione)

Dim: $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$ da cui

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)$$

Ovviamente $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, e $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

$$\text{da cui } P((A \cup B) \cap C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P((A \cap C) \cap (B \cap C)) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

e quindi

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - [P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)]$$

e la tesi segue immediatamente.

caso generale (SENZA DIMOSTRAZIONE)

Probabilità che si verifichi almeno uno tra gli eventi $A_1, A_2, \dots, A_N$, ossia

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_N) - [P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + \dots + P(A_i \cap A_j) + \dots + P(A_{n-1} \cap A_n)] + \dots$$

$$+ \dots + (-1)^{k-1} \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_k\}} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \dots + (-1)^{N-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_N)$$

dove le somme $\sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_k\}}$ sono fatte su tutti i C^N_k sottoinsiemi di $\{1, 2, \dots, N\}$ aventi cardinalità k

ATTENZIONE spesso però è più comodo calcolare

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N) = 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_N^c)$$

5) venerdì 7 marzo 2013

Altre conseguenze degli assiomi:

Prima forma della formula delle probabilità totali

Costruzione di spazi di probabilità finiti

PRIMA FORMA DELLA FORMULA DELLE PROBABILITA' TOTALI

Se $H_1, H_2, \dots, H_m$ formano una partizione dell'evento certo

ossia sono disgiunti a due a due (ossia per ogni $i \neq j$ $H_i \cap H_j = \emptyset$, cioè H_i e H_j sono eventi incompatibili)

e $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_m = \Omega$ (cioè gli eventi $H_1, \dots, H_m$ sono esaustivi)

allora $P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_m) = 1$ (immediata)

e

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \dots + P(A \cap H_m)$$

(basta osservare che $A = A \cap \Omega = A \cap (H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_m) = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \dots \cup (A \cap H_m)$, e che $(A \cap H_i)$ e $(A \cap H_j)$ sono incompatibili per ogni $i \neq j$

e infine usare la proprietà di additività)

Caratterizzazione degli spazi di probabilità in cui è un insieme finito e l'algebra degli eventi è tutto l'insieme delle parti

$$\Omega = \{\omega_i, i=1, \dots, N\}$$

$p_i = P(\{\omega_i\})$ con le condizioni che $p_i \geq 0$, e che $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$

risulta necessariamente

$$P(E) = \sum_{\{i=1, \dots, N \text{ t.c. } \omega_i \text{ appartiene a } E\}} P(\{\omega_i\}) = \sum_{\{i=1, \dots, N \text{ t.c. } \omega_i \text{ appartiene a } E\}} p_i$$

$$\text{infatti } P(E) = P(E \cap H_1) + P(E \cap H_2) + \dots + P(E \cap H_N)$$

$$\text{dove } H_k = \{\omega_k\}$$

$$\text{e quindi } P(E \cap H_k) = 0 \quad \text{se } \omega_k \text{ non appartiene ad } E \quad (\omega_k \notin E) \quad \text{in quanto } E \cap H_k = \emptyset$$

$$\text{mentre } P(E \cap H_k) = P(\{\omega_k\}) \quad \text{se } \omega_k \text{ appartiene ad } E \quad (\omega_k \in E) \quad \text{in quanto } E \cap H_k = H_k = \{\omega_k\}$$

Viceversa, presi $p_i \geq 0$, e che $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$ e definita, su tutti i sottoinsiemi di Ω

$$P(E) = \sum_{\{i=1, \dots, N \text{ t.c. } \omega_i \text{ appartiene a } E\}} p_i$$

La funzione P è una probabilità (ossia $0 \leq P(E) \leq 1$, $P(\Omega) = 1$ e se A_i sono eventi incompatibili a due a due, allora la probabilità dell'unione è la somma delle rispettive probabilità) LASCIATO per esercizio

ESERCIZIO 1: Dati tre eventi A , B e C

1a. E' possibile che

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B \cap C^c) = 0.1, \quad P(A \cap B^c \cap C) = P(A^c \cap B \cap C) = 0.15 \quad \text{e}$$

$$P(A^c \cap B^c \cap C) = P(A \cap B^c \cap C^c) = P(A^c \cap B \cap C^c) = 0.05 \quad ?$$

RISPOSTA: sì è possibile infatti la somma delle precedenti probabilità è minore o uguale a 1 e quindi

$$P(A^c \cap B^c \cap C^c) = 1 - [P(A \cap B \cap C) + \dots + P(A^c \cap B \cap C^c)] \geq 0 \quad (\text{e viene } P(A^c \cap B^c \cap C^c) = 1 - 0.65 = 0.35)$$

1b. Calcolare $P(A)$, $P(B)$ e $P(C)$, 1c. Calcolare $P(A \cup B)$ e $P(A \cup C)$ 1d. Calcolare $P(A \cup B \cup C)$

SOLUZIONE:

1b.

$$A = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \quad \text{quindi}$$

$$P(A) = P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C) + P(A \cap B^c \cap C^c) = 0.1 + 0.1 + 0.15 + 0.05 = 0.40, \quad P(B) \text{ e } P(C) \text{ si calcolano in modo analogo}$$

1c.

$$\text{ad esempio } A \cup B = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c)$$

$$\text{o anche } A \cup B = A \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \quad \text{e quindi}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B \cap C) + P(A^c \cap B \cap C^c) = 0.40 + 0.15 + 0.05 = 0.60$$

$$1d. \text{ Conviene in questo caso osservare che } P(A \cup B \cup C) = 1 - P(A^c \cap B^c \cap C^c) = 0.65$$

6) lunedì 11 marzo 2013

Anagrammi di parole e introduzione ai coefficienti multinomiali

CALCOLARE il numero degli anagrammi (anche senza senso) DI MATEMATICA

In due modi consideriamo le lettere come tutte distinte $M_1, M_2, A_1, A_2, A_3, T_1, T_2, E_1, I_1, C_1$,

PRIMO MODO tutte le loro permutazioni sono $10!$, ma permutando in $2!$ modi tra loro le 2 lettere M_i ottengo lo stesso anagramma, e lo stesso se permuto (in $3!$ modi) le 3 lettere A_i oppure le 2 lettere T_i quindi devo dividere per $3!2!2!$

Quindi sono $10!/(2!3!2!)$ anagrammi distinti, conviene scrivere però

$$10!/(2!3!2!1!1!1!)$$

In quanto si può effettuare il seguente controllo: la somma di $2+3+2+1+1+1=10$

SECONDO MODO (difficile a dirsi, facile a farsi)

Ci sono 10 posti a disposizione dove mettere le 2 M e questa scelta può essere fatta in C^{10}_2 modi, ad esempio:

. M . . M in $C^{10}_2=10!/(2!8!)$ modi diversi

Per ciascuna scelta, nei rimanenti $8=10-2$ posti posso mettere in C^8_3 modi le 3 lettere A, ad esempio

. M . A M . A . . A in $C^{10}_2 C^8_3 = [10!/(2!8!)] [8!/(3!5!)] = 10!(2!3!5!)$ modi diversi

Per ciascuna delle precedenti scelte posso mettere nei $5=8-3$ posti liberi in C^5_2 modi diversi le 2 T, ad esempio

. M T A M . A T . A in $C^{10}_2 C^8_3 C^5_2 = [10!/(2!8!)] [8!/(3!5!)] [5!/(2!3!)] = 10!(2!3!2!3!)$ modi diversi

Per ciascuna delle precedenti scelte posso mettere nei $3=5-2$ posti liberi in C^3_1 modi diversi la E, ad esempio

. M T A M . A T E A in $C^{10}_2 C^8_3 C^5_2 C^3_1 = [10!/(2!8!)] [8!/(3!5!)] [5!/(2!3!)] [3!/(1!2!)] = 10!(2!3!2!1!2!)$ modi diversi

Per ciascuna delle precedenti scelte posso mettere nei $2=3-1$ posti liberi in C^2_1 modi diversi la I, ad esempio

I M T A M . A T E A in $C^{10}_2 C^8_3 C^5_2 C^3_1 C^2_1 = [10!/(2!8!)] [8!/(3!5!)] [5!/(2!3!)] [3!/(1!2!)] [2!/(1!1!)] = 10!(2!3!2!1!1!1!)$ modi diversi

E a questo punto la C può essere messa in un solo modo possibile C^1_1

I M T A M C A T E A in $C^{10}_2 C^8_3 C^5_2 C^3_1 C^2_1 C^1_1 = 10!(2!3!2!1!1!1!)$ modi diversi

++++++

ATTENZIONE: se $k_1, k_2, \dots, k_m$ sono numeri interi ≥ 0 e tali che se $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$

il numero $n!/(k_1! k_2! \dots k_m!)$ è detto coefficiente multinomiale

inoltre $n!/(k_1! k_2! \dots k_m!) = C^n_{\{k_1\}} C^{n-k_1}_{\{k_2\}} C^{n-k_1-k_2}_{\{k_3\}} \dots C^{n-k_1-k_2-\dots-k_{m-1}}_{\{k_m\}}$

++++++

Calcolare gli anagrammi di MATEMATICA che contengono la sequenza ICE (cioè le tre lettere ICE consecutive) al suo interno:

SOLUZIONE: dobbiamo dividere gli anagrammi in 8 tipi:

tipo 1 I C E

dove al posto dei 7 puntini ci vanno gli anagrammi di MMAAATT e che sono quindi $7!/(2!3!2!)$

tipo 2 . I C E dove al posto dei 7 puntini ci vanno gli anagrammi di MMAAATT e che sono quindi $7!/(2! 3! 2!)$

e così via fino al

tipo 8 I C E dove al posto dei 7 puntini ci vanno gli anagrammi di MMAAATT e che sono quindi $7!/(2! 3! 2!)$

in conclusione gli anagrammi di MATEMATICA che contengono la sequenza ICE sono $8 \cdot 7!/(2! 3! 2!) = 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

Calcolare gli anagrammi di MATEMATICA che contengono la sequenza MAT (cioè le tre lettere MAT consecutive) al suo interno:

se procediamo come prima otteniamo

tipo 1 M A T

dove al posto dei 7 puntini ci vanno gli anagrammi di MAATICE e che sono quindi $7!/(1!2! 1! 1!1!1!) = 7!/2$

tipo 2 . M A T dove al posto dei 7 puntini ci vanno gli anagrammi di MAATICE e che sono quindi $7!/(1!2! 1! 1!1!1!) = 7!/2$

e così via fino al

tipo 8 M A T dove al posto dei 7 puntini ci vanno gli anagrammi di MAATICE e che sono quindi $7!/(1!2! 1! 1!1!1!) = 7!/2$

e poi sommiamo ottenendo $8 \cdot 7!/2 = 8!/2$ FACCIAMO UN ERRORE: infatti calcoliamo due volte gli anagrammi che hanno due volte la sequenza MAT al loro interno

e quindi, dopo aver sommato tutti questi numeri, dobbiamo sottrarre tutti gli anagrammi che contengono due volte la sequenza MAT

(sempre per il principio di inclusione- esclusione)

questi ultimi sono tanti quanti gli anagrammi di

XXEXICA dove, per brevità, con X abbiamo indicato la sequenza MAT e sono quindi $6!/(2!1!1!1!1!) = 6!/2$

(non si continua perché non è possibile avere tre sequenze MAT)

in conclusione gli anagrammi di MATEMATICA che contengono la sequenza MAT sono $8!/2 - 6!/2 = 6! \cdot (8 \cdot 7 - 1)/2 = 6! \cdot 55/2 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11$

Esempio: (dal Ross) Si mischia bene un mazzo di carte francesi (52 carte con 4 semi:

cuori ♥, quadri ♦, fiori ♣, picche ♠) e si mostrano le carte una dopo l'altra, Calcolare la Probabilità di

A= "subito dopo il primo asso esce il due di picche", B= "subito dopo il primo asso esce l'asso di picche"

E = "subito dopo il primo asso esce un altro asso", (non proposto a lezione F="subito dopo il primo asso NON esce un altro asso")

SOLUZIONE per P(A):

Usando la probabilità classica, numero dei casi favorevoli diviso il numero dei casi possibili:

CASI POSSIBILI: Ω = tutte le permutazioni di 52 elementi quindi $|\Omega| = 52!$

CASI FAVOREVOLI: per costruire un caso favorevole possiamo mischiare le 51 carte del mazzo, avendo escluso il 2 di picche, e poi mettere il due di picche subito dopo il primo asso, QUINDI data una permutazione delle 51 carte otteniamo un caso favorevole, VICEVERSA, dato un qualunque caso favorevole, se togliamo il due di picche otteniamo una permutazione delle 51 carte rimaste, quindi i casi favorevoli sono tanti quante le permutazioni di 51 carte, ossia il numero dei casi favorevoli è uguale a $51!$, ovvero $|A| = 51!$

Di conseguenza $P(A) = |A|/|\Omega| = 51!/52! = 1/52$

SOLUZIONE PER P(B): $P(B)=P(A)$ stesso ragionamento, sostituendo il due di picche con l'asso di picche.

SOLUZIONE PER P(E): $= 4P(B)$ infatti $E=B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$, dove $B_1=B=$ "subito dopo il primo asso esce l'asso di picche"

$B_2=$ "subito dopo il primo asso esce l'asso di fiori" $B_3=$ "subito dopo il primo asso esce l'asso di quadri" e $B_4=$ "subito dopo il primo asso esce l'asso di cuori"

e notare che $P(B_i)=P(B)$ e che B_i sono eventi incompatibili a due a due

SOLUZIONE PER P(F): $P(F)=4P(A)$ infatti $F=A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{48}$ (dove $A_i=$ "subito dopo il primo asso esce la carta i", avendo numerato le carte in modo che gli assi sono le ultime 4 carte e $P(A_i)=P(A)$)

OSSERVAZIONE mentre $P(A)=P(B)$ si ha invece $P(E)<P(F)$

FISSATO l'evento B, con $P(B)>0$, LA PROBABILITA' CONDIZIONATA a B E' UNA PROBABILITA'

Dimostrazione che, fissato B con $P(B)>0$, la probabilità condizionata a B è una probabilità, ossia, posto $P_B(A)=P(A|B) := P(A \cap B)/P(B)$

$P_B: \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1], A \in \mathcal{F} \rightarrow P_B(A)=P(A|B) := P(A \cap B)/P(B)$

BISOGNA CONTROLLARE CHE E' UNA PROBABILITA', ossia che EFFETTIVAMENTE

a) $0 \leq P(A|B) \leq 1$, infatti $P(A|B) := P(A \cap B)/P(B)$ è sicuramente non negativo, in quanto $P(A \cap B) \geq 0$ e $P(B)>0$

Inoltre per la proprietà di monotonia $P(A \cap B) \leq P(B)$ (in quanto $A \cap B$ è un sottoinsieme di B)

b) $P(\Omega|B)=P_B(\Omega)=1$ infatti $P(\Omega|B) := P(\Omega \cap B)/P(B)=P(B)/P(B)=1$

c) Se A_i sono eventi incompatibili a due a due (ovvero $A_i \cap A_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$) allora $P_B(\bigcup_{i=1, \dots, n} A_i) = \sum_{i=1, \dots, n} P_B(A_i)$ ossia $P(\bigcup_{i=1, \dots, n} A_i | B) = \sum_{i=1, \dots, n} P(A_i | B)$

Infatti

$P(\bigcup_{i=1, \dots, n} A_i | B) = P((\bigcup_{i=1, \dots, n} A_i) \cap B) / P(B) = P(\bigcup_{i=1, \dots, n} (A_i \cap B)) / P(B)$ (gli eventi $A_i \cap B$ sono incompatibili a 2 a 2)

$$= (\sum_{i=1, \dots, n} P(A_i \cap B)) / P(B) = \sum_{i=1, \dots, n} P(A_i \cap B) / P(B) = \sum_{i=1, \dots, n} P(A_i | B)$$

FORMULA DELLE PROBABILITA' COMPOSTE E COSTRUZIONE DI SPAZI DI PROBABILITA'

su Probabilità condizionata: definizione e suo utilizzo. Se B è un evento (cioè $B \in \mathcal{F}$) con $P(B)>0$, ed A è un evento (cioè $A \in \mathcal{F}$), la definizione di Probabilità condizionata di A dato B (sapendo che B si è verificato) si scrive $P(A|B)$ ed è definita come

$P(A|B)=P(A \cap B)/P(B)$ da cui immediatamente $P(A \cap B)=P(B) P(A|B)$ che spesso è il modo con cui si usa la probabilità condizionata, ossia sappiamo calcolare P(B) e $P(A|B)$ e poi calcoliamo la probabilità dell'intersezione. Inoltre la formula $P(A \cap B)=P(B) P(A|B)$ è la prima forma della

FORMULA DELLA PROBABILITA' COMPOSTE (detta anche del PRODOTTO):

Se $E_1, E_2, \dots, E_n$ sono eventi (cioè $E_i \in \mathcal{F}$ per $i=1, \dots, n$) con $P(E_1 \cap E_2 \dots \cap E_{n-1})>0$, allora

$P(E_1 \cap E_2 \dots \cap E_{n-1} \cap E_n) = P(E_1) P(E_2 | E_1) P(E_3 | E_1 \cap E_2) \dots P(E_j | E_1 \cap E_2 \dots \cap E_{j-1}) \dots P(E_n | E_1 \cap E_2 \dots \cap E_{n-1})$

OSSERVAZIONE ovviamente dati $E_1, E_2, \dots, E_n$ anche $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \dots, \tilde{E}_n$ sono eventi, dove $\tilde{E}_j$ sta per E_j o per il suo complementare E_j^c , la formula delle probabilità composte si applica anche a

$$P(\tilde{E}_1 \cap \tilde{E}_2 \dots \cap \tilde{E}_{n-1} \cap \tilde{E}_n)$$

Ad esempio per $n=3$

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) P(E_2 | E_1) P(E_3 | E_1 \cap E_2)$$

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3^c) = P(E_1) P(E_2 | E_1) P(E_3^c | E_1 \cap E_2)$$

$$P(E_1 \cap E_2^c \cap E_3) = P(E_1) P(E_2^c | E_1) P(E_3 | E_1 \cap E_2^c)$$

$$P(E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c) = P(E_1) P(E_2^c | E_1) P(E_3^c | E_1 \cap E_2^c)$$

$$P(E_1^c \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1^c) P(E_2 | E_1^c) P(E_3 | E_1^c \cap E_2)$$

$$P(E_1^c \cap E_2 \cap E_3^c) = P(E_1^c) P(E_2 | E_1^c) P(E_3^c | E_1^c \cap E_2)$$

$$P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3) = P(E_1^c) P(E_2^c | E_1^c) P(E_3 | E_1^c \cap E_2^c)$$

$$P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c) = P(E_1^c) P(E_2^c | E_1^c) P(E_3^c | E_1^c \cap E_2^c)$$

e quindi si possono calcolare tutte le probabilità relative a qualunque evento che "riguarda" i tre eventi

AD ESEMPIO per calcolare $P(E_1 \cap E_3)$ consideriamo che

$$E_1 \cap E_3 = (E_1 \cap E_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap E_2^c \cap E_3)$$

e quindi

$$P(E_1 \cap E_3) = P((E_1 \cap E_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap E_2^c \cap E_3)) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2^c \cap E_3)$$

CENNO AL COLLEGAMENTO CON LA COSTRUZIONE DELL'ALBERO PER IL CALCOLO DELLE PROBABILITA' in esempi concreti

5) mercoledì 13 marzo 2013

RICHIAMO DELLA FORMULA DELLE PROBABILITA' COMPOSTE (o del PRODOTTO)

FORMULA DELLE PROBABILITA' TOTALI II VERSIONE

e FORMULA DI BAYES I E II VERSIONE

FORMULA DELLE PROBABILITA' TOTALI II VERSIONE

Sappiamo che, se $H_1, H_2, \dots, H_m$ formano una partizione dell'evento certo

ossia sono disgiunti a due a due (ossia per ogni $i \neq j$ $H_i \cap H_j = \emptyset$, cioè H_i e H_j sono eventi incompatibili)

e $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_m = \Omega$ (cioè gli eventi $H_1, \dots, H_m$ sono esaustivi)

per ogni evento A si ha

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \dots + P(A \cap H_m)$$

SE INOLTRE SUPPONIAMO $P(H_i) > 0$ per ogni $i=1, \dots, m$ e tenendo conto che $P(A \cap H_i) = P(H_i) P(A | H_i)$ si ottiene che

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \dots + P(A \cap H_m) = P(H_1) P(A | H_1) + P(H_2) P(A | H_2) + \dots + P(H_m) P(A | H_m)$$

Ovviamente questa formula è utile SOLO quando siamo in grado di calcolare $P(H_i)$ e $P(A | H_i)$ per ogni i .

ESEMPIO: si lancia una moneta equilibrata e

se esce TESTA, si lancia un dado equilibrato e si ottiene come risultato il valore della faccia uscita,

se invece esce CROCE, si lanciano due dadi equilibrati e si ottiene come risultato la somma delle due facce uscite

CALCOLARE la PROBABILITA' DI OTTENERE 6

SOLUZIONE:

Posto $H_1 =$ "esce TESTA" e $H_2 =$ "esce CROCE" si ha che $P(H_1) = P(H_2) = 1/2$ (abbiamo ipotizzato una moneta ben equilibrata)

ed inoltre, nel caso in cui uscisse TESTA, la probabilità che esca come risultato 6 vale $1/6$

OSSIA, posto A l'evento "il risultato ottenuto è 6", la probabilità di A condizionata ad H_1 vale $1/6$, cioè si ha $P(A | H_1) = 1/6$,

Analogamente, nel caso in cui uscisse CROCE, la probabilità che esca come risultato 6 vale $5/36$ (infatti se lancio due dadi si ottiene come somma 6 in uno dei 5 casi (1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1) sui 36 possibili,

OSSIA la probabilità di A condizionata ad H_2 vale $5/36$, cioè si ha $P(A | H_2) = 5/36$,

A questo punto poiché H_1 ed H_2 formano una partizione dell'evento certo,

possiamo affermare che

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) = P(H_1) P(A | H_1) + P(H_2) P(A | H_2) = (1/2) (1/6) + (1/2) (5/36) = (1/2) (6/36) + (1/2) (5/36) = 11/72$$

SEMPRE NELLA SITUAZIONE PRECEDENTE, SUPPONIAMO DI SAPERE SOLO CHE si è verificato l'evento A ossia che il risultato ottenuto è 6,

OSSIA NON SAPPIAMO SE TALE RISULTATO E' STATO OTTENUTO LANCIANDO UNO O DUE DADI OSSIA se è uscita TESTA o CROCE.

DOMANDA: SAPENDO CHE SI E' VERIFICATO A quanto valgono le probabilità di H_i , per $i=1,2$?

SOLUZIONE: PRIMA DI TUTTO CHIARIAMO CHE la domanda è: quanto valgono $P(H_1 | A)$ e $P(H_2 | A)$?

Anche se non sappiamo la risposta possiamo subito dire che $P(H_2 | A) = 1 - P(H_1 | A)$, infatti $H_2 = H_1^c$ e $P_A(H_i) = P(H_i | A)$ è una probabilità per definizione si ha

$$P(H_1 | A) = P(A \cap H_1) / P(A) = P(H_1) P(A | H_1) / P(A) = (1/2) (1/6) / (11/72)$$

alternativamente possiamo utilizzare il fatto che $P(A) = P(H_1) P(A | H_1) + P(H_2) P(A | H_2)$ e scrivere

$$P(H_1 | A) = P(A \cap H_1) / P(A) = P(H_1) P(A | H_1) / P(A) = P(H_1) P(A | H_1) / [P(H_1) P(A | H_1) + P(H_2) P(A | H_2)]$$

in questo caso è conveniente infatti ci viene

$$P(H_1 | A) = P(H_1) P(A | H_1) / [P(H_1) P(A | H_1) + P(H_2) P(A | H_2)] = (1/2) (1/6) / [(1/2) (1/6) + (1/2) (5/36)] = (1/2) (6/36) / [(1/2) (6/36) + (1/2) (5/36)]$$

(semplificando $(1/2) (1/36)$ a numeratore e a denominatore) $= 6 / [6+5] = 6/11$

e quindi

$$P(H_2 | A) = 5/11$$

Si osservi che se invece fosse stata chiesta la probabilità di H_i dato l'evento $E = \text{"il risultato ottenuto è 7"}$ avremmo potuto dire immediatamente che $P(H_1|E)=0$ e $P(H_2|E)=1$. E ancora, postp $F = \text{"il risultato ottenuto è 1"}$ si ha che $P(H_1|F)=1$ e $P(H_2|F)=0$.

QUESTO risultato E' UN CASO PARTICOLARE DELLA **FORMULA DI BAYES**

Dati due eventi A e B , con $P(A)>0$ e $P(B) >0$ si ha

$$P(B|A)=P(A \cap B)/P(A)= P(B)P(A|B)/P(A) \quad (\text{e anche } P(A|B)=P(A \cap B)/P(B)= P(A)P(B|A)/P(B))$$

L'interessante viene quando si ha una partizione $H_1, \dots, H_m$ con $P(H_i)>0$ per ogni i per cui

$$P(H_i|A)=P(A \cap H_i)/P(A)= P(H_i) P(A|H_i)/P(A) \quad (\text{formula di Bayes I versione})$$

$$= P(H_i) P(A|H_i) / [\sum_k P(H_k)P(A|H_k)] \quad (\text{formula di Bayes II versione})$$

dove si è tenuto conto della formula delle probabilità totali (II versione)

OSSERVAZIONE in tale contesto H_i sono dette ipotesi, $P(H_i)$ sono dette le probabilità a priori, $P(A|H_i)$ sono dette le verosimiglianze e infine $P(H_i|A)$ sono dette probabilità a posteriori.

Si ha che $P(H_i|A)$ sono proporzionali al prodotto della probabilità a priori e delle verosimiglianze.

ESERCIZI SUL GIOCO DEL LOTTO

CALCOLO DELLA PROBABILITA' DI CINQUINA, QUATERNA, TERNO, AMBO E NUMERO SINGOLO (su una ruota fissata)

e relazione con la formula delle probabilità composte

QUI RIPORTIAMO SOLO il "terno"

ESTRAZIONI SENZA REINSERIMENTO: GIOCO DEL LOTTO, calcolo di ambo, terno, quaterna e cinquina, su una ruota fissata (ad esempio la ruota di Roma), IN TRE MODI

(a) prendendo Ω uguale alle disposizioni di 90 elementi (i numeri da 1 a 90) di classe 5

Esempio del terno: i casi possibili sono $D^{90}_5 = 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86$,

fissate le posizioni di uscita e l'ordine di uscita dei 3 numeri giocati i casi favorevoli sono $87 \cdot 86 = D^{87}_2$, per ognuno di questi casi, ci sono poi

$5 \cdot 4 \cdot 3 = D^5_3 = C^5_3 \cdot P_3$ modi per fissare posizione e ordine di uscita e quindi i casi favorevoli sono in totale $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 87 \cdot 86$

e infine la probabilità di terno si calcola come $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 87 \cdot 86 / (90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86)$

(a bis) prendendo Ω uguale alle combinazioni di 90 elementi (i numeri da 1 a 90) di classe 5 (**come se fossero estrazioni in blocco: ATTENZIONE questo è possibile solo perché negli eventi considerati l'ordine di estrazione non ha importanza**)

Esempio del terno: i casi possibili sono $C^{90}_5 = 90! / (85! \cdot 5!) = D^{90}_5 / P_5$

i casi favorevoli si calcolano pensando che i 3 numeri giocati (come se fossero palline bianche) devono essere tutti scelti e quindi in $C^{90}_3 = 3! / (3! \cdot 0!) = D^{90}_3 / P_3$ modi

e ci sono $C^{87}_2 = 87! / (2! \cdot 85!) = D^{87}_2 / P_2$ modi di prendere due degli 87 numeri rimasti quindi i casi favorevoli sono $C^{90}_3 \cdot C^{87}_2$

e la probabilità di fare terno vale

$$C^{90}_3 \cdot C^{87}_2 / C^{90}_5 = (D^{90}_3 / P_3) \cdot (D^{87}_2 / P_2) / (D^{90}_5 / P_5) = (P_5 / (P_2 \cdot P_3)) \cdot (D^{90}_3 \cdot D^{87}_2 / D^{90}_5) = (P_5 / (P_2 \cdot P_3)) \cdot (P_3 \cdot D^{87}_2 / D^{90}_5)$$

(b) utilizzando le probabilità condizionali e la formula delle probabilità composte: posto $E_j =$ "esce il numero j sulla ruota di Roma" (senza specificare la posizione)

se abbiamo giocato il terno con i numeri 3, 19 e 61, l'evento "esce il terno" si scrive come $E_3 \cap E_{19} \cap E_{61}$

e quindi per la formula delle probabilità composte si ha

$$P(E_3 \cap E_{19} \cap E_{61}) = P(E_3) P(E_{19}|E_3) P(E_{61}|E_3 \cap E_{19}) = (5/90) * (4/89) * (3/88)$$

infatti ad esempio $E_3 = E_3^{(1)} \cup E_3^{(2)} \cup E_3^{(3)} \cup E_3^{(4)} \cup E_3^{(5)}$,

dove $E_3^{(i)}$ rappresenta l'evento "il 3 esce al posto i-simo" (per $i = 1, 2, 3, 4, 5$)

$$\text{e quindi } P(E_3) = P(E_3^{(1)}) + P(E_3^{(2)}) + P(E_3^{(3)}) + P(E_3^{(4)}) + P(E_3^{(5)}) = (1/90) + (1/90) + (1/90) + (1/90) + (1/90) = 5/90$$

Infatti la cardinalità di $E_3^{(i)}$ è la stessa per ogni i, ad esempio

$E_3^{(1)} = \{ (3, i, j, k, l) \text{ disposizioni di 90 elementi di classe 5} \}$ e $E_3^{(2)} = \{ (i, 3, j, k, l) \text{ disposizioni di 90 elementi di classe 5} \}$

i due insiemi sono in corrispondenza biunivoca: basta scambiare le prime due componenti e quindi hanno la stessa cardinalità

i casi favorevoli a $E_3^{(1)}$ sono chiaramente $1 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86$ e quindi $P(E_3^{(1)}) = 1/90 [= 1 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 / (90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86)]$

ESERCIZIO 2.

2a. Se sappiamo che $P(A \cap B) = 2 P(A \cap B^c)$, $P(A^c \cap B^c) = 2 P(A \cap B)$ e $P(A^c \cap B) = 2 P(A^c \cap B^c)$ possiamo trovare $P(A)$?

SOLUZIONE: posto ad esempio $p_0 = P(A^c \cap B^c)$, $p_1 = P(A \cap B^c)$, $p_2 = P(A^c \cap B)$ e $p_3 = P(A \cap B)$

abbiamo

$$p_0, p_1, p_2, p_3 \geq 0,$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \quad (\text{infatti } H_0 = A^c \cap B^c, H_1 = A \cap B^c, H_2 = A^c \cap B, H_3 = A \cap B \text{ formano una partizione dell'evento certo})$$

$$p_3 = 2 p_1 \quad (\text{dalle relazioni precedenti})$$

$$p_0 = 2 p_3$$

$$p_2 = 2 p_0$$

Abbiamo quindi 4 equazioni nelle 4 incognite p_0, p_1, p_2 e p_3 (e ci aspettiamo di trovare una soluzione, ma ATTENZIONE dovremo controllare se p_i sono tutte non negative) e la risposta sarà $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = p_3 + p_1$

Per risolvere il sistema possiamo, ad esempio, esprimere tutte le p_1, p_2 e p_3 in funzione di p_0 , ossia

$$p_2 = 2 p_0, p_3 = p_0/2 \text{ e } p_1 = p_3/2 = p_0/4$$

$$\text{e infine } p_0 + p_0/4 + 2 p_0 + p_0/2 = 1, \text{ ossia } p_0 (1 + 1/4 + 2 + 1/2) = p_0 \cdot 15/4 = 1 \text{ da cui } p_0 = 4/15$$

e di conseguenza

$$p_1 = 1/15, p_2 = 8/15 \text{ e } p_3 = 2/15$$

$$\text{e infine } P(A) = p_1 + p_3 = 3/15 = 1/5$$

2b. Se invece sappiamo solo che $P(A \cap B) = 2 P(A \cap B^c)$, $P(A^c \cap B^c) = 2 P(A \cap B)$ possiamo trovare delle limitazioni per $P(A)$?

in questo caso abbiamo solo

$$p_0, p_1, p_2, p_3 \geq 0,$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \quad (\text{infatti } H_0 = A^c \cap B^c, H_1 = A \cap B^c, H_2 = A^c \cap B, H_3 = A \cap B \text{ formano una partizione dell'evento certo})$$

$$p_3 = 2 p_1 \quad (\text{dalle relazioni precedenti})$$

$$p_0 = 2 p_3$$

Ad esempio, posto $p_1 = \alpha$, si ha

$$p_3 = 2\alpha, \quad p_0 = 2p_3 = 4\alpha, \quad \text{e infine } p_2 = 1 - p_0 - p_1 - p_3 = 1 - (4\alpha + \alpha + 2\alpha) = 1 - 7\alpha,$$

$$\text{da cui } P(A) = p_1 + p_3 = \alpha + 2\alpha = 3\alpha.$$

Per finire l'esercizio bisogna trovare le limitazioni per α : ora il parametro α deve essere non negativo (dalle condizione $p_i \geq 0$) e d'altra parte anche $p_2 = 1 - 7\alpha$ deve essere non negativo per cui $0 \leq \alpha \leq 1/7$ e di conseguenza le limitazioni cercate sono

$$0 \leq P(A) = 3\alpha \leq 3/7.$$

7) venerdì 15 marzo 2013

PROBLEMA di un test medico sull'HIV (si trova sugli Appunti di Calcolo delle Probabilità di Spizzichino Nappo)

Situazione: H = "avere il virus", T^+ = "risultare positivo al test"

il test è "economico", MA NON è sicuro al 100% nel senso che può dare

sia falsi positivi (cioè si può risultare positivo senza avere il virus)

sia falsi negativi (cioè si può risultare negativi al test anche avendo il virus)

noti $P(H)$ e $P(T^+ | H)$ e $P(T^+ | H^c)$

calcolati come

$P(H)$ = frequenza relativa dei malati di AIDS in una popolazione fissata,

$P(T^+ | H)$ = frequenza relativa delle volte che un malato di AIDS è risultato positivo al test $= 1 - P(T^- | H)$, dove $P(T^- | H)$ = frequenza relativa dei falsi negativi

$P(T^+ | H^c)$ = frequenza relativa dei falsi positivi

(evidentemente c'è un test più costoso, ma sicuro che permette di sapere con certezza se un individuo ha l'AIDS e no, e quindi permette di ottenere queste frequenze)

DATI del PROBLEMA: $P(H) = 0.6\%$ (dato verosimile per New York nel 1990) $P(T^+ | H) = 99.9\%$ e $P(T^+ | H^c) = 1\%$ (dati di fantasia)

DOMANDE:

i) calcolare la probabilità di risultare positivi al test

ii) calcolare la probabilità di avere il virus, sapendo che si è risultati positivi al test (cioè calcolare $P(H | T^+)$)

il calcolo va fatto tenendo conto che $P(T^+ | H)$ e $P(T^+ | H^c)$ non cambiano, ma può cambiare $P(H)$, se cambia la popolazione, ossia se un individuo è scelto a caso nella popolazione di riferimento, oppure in un'altra popolazione: ad esempio, se la persona è scelta a caso tra tutta la cittadinanza di New York, si prenderà come probabilità a priori, ossia $P(H) = 0.6\%$, se invece tra i tossico-dipendenti di New York, e che è stato a contatto con malati di AIDS, tale probabilità la probabilità dovrebbe essere molto più alta ad esempio si potrebbe prendere $P(H) = 1/2$ (dato di fantasia)

i) SOLUZIONE: Si chiede $P(T^+)$. Si osserva che H e H^c formano una partizione dell'evento certo e quindi possiamo usare la formula delle probabilità totali, tenendo conto che $P(H^c)=1-P(H)$ si ha

$$P(T^+)=P(H)P(T^+|H)+P(H^c)P(T^+|H^c)=(6/1000)(999/1000)+(994/1000)(1/100)=0,015 \text{ circa}$$

ii) SOLUZIONE: SI CHIEDE $P(H|T^+)$, e si può usare la formula di BAYES

$$P(H|T^+)=P(H)P(T^+|H)/P(T^+)=P(H)P(T^+|H)/[P(H)P(T^+|H)+P(H^c)P(T^+|H^c)]=(6/1000)(999/1000)/[(6/1000)(999/1000)+(994/1000)(1/100)]$$

$$= (6/1000)(999/1000)/[(6/1000)(999/1000)+(994/1000)(10/1000)]=6999/[6999+99410]=0.378 \text{ circa}$$

ATTENZIONE e' molto più alta di 0,006, ma più piccola di un mezzo,

VA NOTATO CHE se invece la persona che fa il test appartiene a una categoria a rischio e si stimasse $P(H)$ circa 1/2 avremmo avuto invece

$$P(H|T^+)=P(H)P(T^+|H)/P(T^+)=P(H)P(T^+|H)/[P(H)P(T^+|H)+P(H^c)P(T^+|H^c)]=(1/2)(999/1000)/[(1/2)(999/1000)+(1/2)(10/1000)]$$

$$= 999/[999+10]=999/1009=0.99 \text{ circa}$$

LANCIO DI UNA MONETA

ESERCIZIO 3.

Si lancia n volte una moneta ben equilibrata (**il numero di lanci è FISSATO e UGUALE AD n**)

3a. per $h=1,2,...,n$ calcolare la probabilità di "nessuna testa nei primi h lanci" e la probabilità di "nessuna testa nei primi h lanci e nei rimanenti tutte teste"

3b. per $h=1,2,...,n$ calcolare la probabilità di "nessuna testa negli ultimi h lanci" e la probabilità di "nessuna testa negli ultimi h lanci e nei rimanenti tutte teste"

3c. per $k=0,1,2,...,n$ calcolare la probabilità dell'evento "Croce si presenta esattamente k volte (negli n lanci)"

[si osservi che equivalentemente si potrebbe chiedere "Croce si presenta esattamente n-k volte (negli n lanci)"]

[si controlli che la somma di tutte queste probabilità vale 1]

si inizia con un caso specifico $n=5$ $k=0$, $k=1$, $k=2$,

3a. SOLUZIONE posto A_h l'evento "nessuna testa nei primi h lanci" si ha $A_h = \{ (C, C, \dots, C, x_{h+1}, x_{h+2}, \dots, x_n) \text{ con } x_i = C \text{ o } T \}$,

ossia i casi favorevoli sono $1 \cdot 1 \dots 1 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2 = 1^h 2^{n-h}$, e i casi possibili sono 2^n

$$\text{Quindi } P(A_h) = 1/2^h [= 2^{n-h}/2^n = 2^{-h}]$$

postp E_h l'evento "nessuna testa nei primi h lanci e nei rimanenti tutte teste" si ha $E_h = \{ (C, C, \dots, C, T, \dots, T) \}$ ossia un solo caso favorevole

$$\text{e quindi } P(E_h) = 1/2^n$$

3b. SOLUZIONE posto B_h l'evento "nessuna testa negli ultimi h lanci" e F_h l'evento "nessuna testa negli ultimi h lanci e nei rimanenti tutte teste"

$$\text{si ha } P(B_h) = P(A_h) \text{ e } P(F_h) = P(E_h)$$

3.c posto C_k l'evento "Croce si presenta esattamente k volte (negli n lanci)" si ha che $C_0 = \{ (T, T, \dots, T) \}$ e $P(C_0) = 1/2^n$, per $k \geq 1$

C_k è l'unione di eventi del tipo di E_k o F_k , che differiscono l'uno dall'altro solo per dove sono le k croci negli n posti disponibili

(possono essere i primi k e nei rimanenti ci sono teste, oppure dal secondo al k+1-simo, etc.) si tratta di C^n_k modi distinti e tutti di probabilità $1/2^n$

$$\text{quindi } P(C_k) = C^n_k 1/2^n$$

VERIFICA: gli eventi $C_0, C_1, \dots, C_n$ formano una partizione dell'evento certo (infatti sicuramente se ne verifica almeno uno e uno solo) quindi necessariamente

Somma_{k=0,...,n} P(C_k)=1 e come controprova si ha

Somma_{k=0,...,n} C^n_k 1/2^n = (1/2^n) Somma_{k=0,...,n} C^n_k = (1/2^n) Somma_{k=0,...,n} C^n_k 1^{n-k} = (1/2^n) (1+1)^n = 1

ESERCIZIO 4

Si effettuano n estrazioni **con reinserimento** da un'urna di composizione NOTA, ossia con b palline bianche ed r palline rosse

(ATTENZIONE il numero n di estrazioni è FISSATO e b ed r sono NOTI)

(stesso tipo di domande dell'esercizio precedente)

4a. per h=1,2,...,n calcolare la probabilità di "nessuna pallina rossa nelle prime h estrazioni" e la probabilità di "nessuna pallina rossa nelle prime h estrazioni e nelle rimanenti estrazioni tutte palline rosse"

4b. per h=1,2,...,n calcolare la probabilità di "nessuna pallina rossa nelle ultime h estrazioni" e la probabilità di "nessuna pallina rossa nelle ultime h estrazioni e nelle rimanenti estrazioni tutte palline rosse"

4c. per k=0,1,2,...,n calcolare la probabilità dell'evento "escono esattamente k palline bianche (nelle n estrazioni)"

[si osservi che equivalentemente si potrebbe chiedere "Croce si presenta esattamente n-k volte (negli n lanci)"]

ESERCIZIO 5.

Si lancia una moneta ben equilibrata fino a quando si ottiene TESTA per la prima volta **(ATTENZIONE il numero di lanci NON è FISSATO)**

Si pone X= numero (aleatorio) di lanci effettuati

5a. per h=1,2,...,m, m+1,... (h>=1) calcolare la probabilità di "X=h"="il numero di lanci effettuati è h"="TESTA esce per la prima volta all' h-simo lancio"

5b. per h=1,2,...,m, m+1,... (h>=1) calcolare la probabilità di "X>h"="il numero di lanci effettuati è (strettamente) maggiore di h"="nessuna testa negli primi h lanci"

5c. per h=1,2,...,m, m+1,... (h>=1) calcolare la probabilità di "X<=h"="il numero di lanci effettuati è minore o uguale ad h"="almeno una testa nei primi h lanci"

si inizia con un caso specifico n=5 k=0, k=1, k=2,

ESERCIZIO 6

Si effettuano estrazioni **con reinserimento** da un'urna di composizione NOTA, ossia con b palline bianche ed r palline rosse, fino a quando si ottiene una pallina BIANCA per la prima volta

(ATTENZIONE il numero n di estrazioni NON è FISSATO, ANCHE SE b ed r sono NOTI)

(stesso tipo di domande dell'esercizio precedente)

Si pone X_B= numero (aleatorio) di estrazioni effettuate (per ottenere per la prima volta pallina bianca)

5a. per h=1,2,...,m, m+1,... (h>=1) calcolare la probabilità di

"X_B=h"="il numero di estrazioni effettuate è h"="pallina bianca esce per la prima volta all' h-sima estrazione"

5b. per $h=1,2,\dots,m, m+1,\dots$ ($h \geq 1$) calcolare la probabilità di

" $X_B > h$ " = "il numero di estrazioni effettuate è (strettamente) maggiore di h " = "nessuna pallina bianca nelle prime h estrazioni"

5c. per $h=1,2,\dots,m, m+1,\dots$ ($h \geq 1$) calcolare la probabilità di

" $X \leq h$ " = "il numero di estrazioni effettuate è minore o uguale ad h " = "almeno una pallina bianca nelle prime h estrazioni"

si inizia con un caso specifico $n=5$ $k=0$, $k=1$, $k=2$,

10) lunedì 18 marzo 2013

ESERCIZIO su estrazioni (febbraio 2013) e paradosso di Bertrand e sul figlio maschio o sul figlio primogenito maschio..

Problema del paradosso di Bertrand (tre scatole identiche contengono rispettivamente

U_0 : due monete d'argento,

U_1 : una moneta d'argento e una d'oro

U_2 : due monete d'oro

Ne viene scelta una a caso e viene estratta una moneta. Sapendo che la moneta estratta è d'oro, calcolare la probabilità che anche la moneta rimanente nella scatola è d'oro.

SOLUZIONE: Posto U_i = "viene scelta l'urna che contiene i monete d'oro" e G_1 = "la prima moneta estratta è d'oro"

stiamo chiedendo di calcolare $P(U_2 | G_1)$ in quanto, sapendo che la prima moneta estratta è d'oro, è equivalente chiedere che l'urna scelta sia quella che contiene due monete d'oro oppure chiedere che la moneta rimanente sia anch'essa d'oro.

Per la formula delle probabilità totali, rispetto alla partizione U_0, U_1, U_2 e all'evento G_1 si ha

$$P(U_2 | G_1) = \frac{P(U_2)P(G_1 | U_2)}{P(U_0)P(G_1 | U_0) + P(U_1)P(G_1 | U_1) + P(U_2)P(G_1 | U_2)}$$

$$= \frac{(1/3) * 1}{[(1/3) * 0 + (1/3) * (1/2) + (1/3) * 1]} = \frac{1}{[0 + (1/2) + 1]} = \frac{1}{(3/2)} = \frac{2}{3}$$

Posto il problema di Monty Hall, senza soluzione

Problema degli accoppiamenti o delle concordanze o della segretaria (o equivalentemente del guardarobiere)

[Matching Problem] APPLICAZIONE DEL PRINCIPIO DI INCLUSIONE-ESCLUSIONE

La segretaria ha N lettere indirizzate a N persone distinte ed N buste con già scritti gli N indirizzi: le cadono tutte le N lettere e quindi mette le N lettere a caso nelle N buste.

(i) Quanto vale la probabilità $p(N)$ che nessuna lettera sia nella busta corrispondente?

(ii) Quanto vale la probabilità $q(N)$ che ci sia almeno una lettera nella busta corrispondente?

La probabilità in (i) è il complementare a 1 della probabilità in (ii) [ossia $p(N)=1-q(N)$]

Per calcolare $q(N)$ si pone A_i = la lettera i -sima e' nella busta i -sima, di modo che

$$q(N)=P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N)$$

$$= P(A_1)+P(A_2)+ \dots +P(A_N) - [P(A_1 \cap A_2)+ P(A_1 \cap A_3)+\dots + P(A_i \cap A_j)+\dots] + \dots + (-1)^{k-1} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \dots + (-1)^{N-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_N)$$

ora, qualunque sia la combinazione $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, si ha $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = (N-k)!/N!$ e quindi la somma

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

fatta su tutte le $N!/([k!(N-k)!])$ combinazioni di N elementi di classe k vale

$$N!/([k!(N-k)!]) (N-k)!/N! = 1/k!$$

di conseguenza

$$q(N)=1/1! - 1/2! + 1/3! - 1/4! + \dots + (-1)^{k-1} 1/k! + \dots + (-1)^{N-1} 1/N!$$

e

$p(N)=1-1/1! + 1/2! - 1/3! + 1/4! + \dots + (-1)^k 1/k! + \dots + (-1)^N 1/N! = \sum_{k=0,1,\dots,N} (-1)^k 1/k!$ che converge (per N che tende ad infinito) a e^{-1} (ossia poco più di un terzo, anzi circa $1/2,71$)

del resto per $N=3$ viene

$$p(3)=1-1/1! + 1/2! - 1/3! = 1/2 - 1/6 = 2/3$$

$$p(4)= 1-1/1! + 1/2! - 1/3! + 1/4! = 1/2 - 1/6 + 1/24 = 17/24$$

$$p(5)= 1-1/1! + 1/2! - 1/3! + 1/4! - 1/5! = 1/2 - 1/6 + 1/24 - 1/120 = 84/120$$

(iii) Quante sono le permutazioni $(i_1, i_2, \dots, i_N)$ di N elementi che non presentano punti fissi (ossia per le quali, qualunque sia j , il valore i_j è diverso da j)

Risposta: $N!p(N)$ ossia $N!$ moltiplicato per la probabilità $p(N)$ che nessuna lettera sia nella busta corrispondente.

OSSERVAZIONE Lo stesso vale per ogni m , ossia ci sono $m!p(m) = m! (1-1/1! + 1/2! - 1/3! + 1/4! - \dots (-1)^m 1/m!)$

permutazioni di m elementi che non hanno punti fissi.

(iv) Quanto vale la probabilità $p(k;N)$ che ci siano esattamente k lettere nella busta corrispondente? (ossia le altre sono tutte in buste sbagliate)

Risposta $p(N-k)/k!$:

Prima di tutto notiamo che, qualunque sia N , $p(N)=p(0;N)$.

I casi favorevoli si contano tenendo presente che si possono scegliere in C^N_{N-k} modi possibili quali sono le k lettere nella busta giusta (cioè i k valori j per i quali $i_j=j$), e che **per ognuna di queste scelte** ci sono poi tante scelte quante sono le permutazioni dei rimanenti $N-k$ elementi con nessun punto fisso. Per il punto precedente queste ultime sono $(N-k)! p(N-k)$. In conclusione

$$p(k;N)=C^N_{N-k} \# \{ \text{permutazioni di } N-k \text{ elementi che non presentano punti fissi} \} / N! = (N!/([k!(N-k)!]) (N-k)! p(N-k) / N! = p(N-k)/k!$$

11) mercoledì 20 marzo 2013

Soluzione del problema di MONTY HALL (vedere file allegato su TWIKI) con variante in cui il presentatore sceglie la porta più vicina a lui con probabilità p invece che $1/2$.

INDIPENDENZA (in senso probabilistico) di due eventi

Definizione: dati due eventi A e B , si dice che A e B sono indipendenti se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

OSSERVAZIONE nel caso in cui $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, è equivalente a dire che $P(A|B) = P(A)$ oppure $P(B|A) = P(B)$

(che in alcuni testi è data come definizione di indipendenza)

AFFERMAZIONE1

Se A e B sono indipendenti allora lo sono anche A e B^c cioè $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ implica $P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c)$

[dimostrazione: $P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = P(A)$, e quindi $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$, se A e B sono indipendenti allora

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(B^c)]$$

con dimostrazioni simili si ottiene che vale anche $P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B)$ e $P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$

[basta scambiare A e B per dimostrare che $P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B)$, oppure partire da $P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B)$ e ottenere $P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$]

In conclusione possiamo affermare che " A e B sono indipendenti" è equivalente ad affermare che

$$P(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = P(\tilde{A})P(\tilde{B}) \text{ dove } \tilde{A} \text{ può essere } A \text{ o } A^c \text{ e } \tilde{B} \text{ può essere } B \text{ o } B^c \text{ (in totale 4 relazioni)}$$

OSSERVAZIONE Se $P(A) = 0$ allora qualunque sia B vale $P(A \cap B) = P(A)P(B)$,

cioè gli insiemi di probabilità nulla sono indipendenti da qualsiasi evento

[dimostrazione: $A \cap B$ è contenuto in A e quindi $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) = 0$ quindi $P(A \cap B) = 0$ e anche $P(A)P(B) = 0$]

ATTENZIONE ALLA DIFFERENZA TRA INDIPENDENZA (in senso probabilistico o stocastico) e INDIPENDENZA LOGICA:

Se A e B sono eventi con probabilità non nulla (cioè positiva : $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$) e sono incompatibili (ovvero sono disgiunti: $A \cap B = \emptyset$) allora A e B NON SONO INDIPENDENTI

[dimostrazione: $P(A)P(B) > 0$ mentre $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ quindi $P(A \cap B) < P(A)P(B)$ e A e B non sono indipendenti (anzi si vede che allora A e B sono correlati negativamente: per la definizione di eventi correlati positivamente e negativamente si vedano le lezioni successive)]

Esempi di eventi indipendenti e NON

ESEMPIO 1: da un mazzo di carte francesi (52 carte: 4 semi, cuori quadri fiori picche, per ciascun seme tredici carte, ossia A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K) si estrae una carta.

evento A = " esce un asso", evento C = " esce una carta di cuori", $A \cap C$ = " esce l'asso di cuori"

$$P(A) = 4/52 = 1/13, \quad P(C) = 13/52 = 1/4, \quad P(A \cap C) = 1/52 \quad P(A)P(C) = (1/13)(1/4) = 1/52$$

quindi A e C SONO INDIPENDENTI

ESEMPIO 1 bis: da un mazzo di carte francesi con due Jolly (come prima 52 carte più 2 Jolly, quindi 54 carte in totale) si estrae una

carta.

evento $A = \text{" esce un asso"}$, evento $C = \text{" esce una carta di cuori"}$, $A \cap C = \text{" esce l'asso di cuori"}$

$P(A) = 4/54 = 2/27$, $P(C) = 13/54$, $P(A \cap C) = 1/54$ $P(A)P(C) = (2/27)(13/54) = (26/27)(1/54)$ diverso da $1/54$

quindi A e C NON SONO INDIPENDENTI

ESEMPIO 2 (non svolto a lezione) Si lanciano due dadi ben equilibrati. Sia X_1 il valore del primo dado e X_2 il valore del secondo dado. Si considerino gli eventi

$E = \{X_1 = 3\}$ ed $F = \{X_1 + X_2 = 7\}$ per cui $E \cap F = \{X_1 = 3, X_2 = 4\}$

Preso $\Omega = \{(i, j) \text{ con } i, j \text{ in } \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ si ha che E ed F sono indipendenti

$E = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$ e $P(E) = 1/6$

$F = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$ e $P(F) = 6/36 = 1/6$

$E \cap F = \{(3, 4)\}$ e $P(E \cap F) = 1/36$

ESEMPIO 2 bis (non svolto a lezione)

stessa situazione, ma sia $G = \{X_1 + X_2 = 4\}$, allora gli eventi E e G NON SONO INDIPENDENTI: infatti

$E = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$ e $P(E) = 1/6$

$G = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ e $P(G) = 3/36 = 1/12$

$E \cap G = \{(3, 1)\}$ e $P(E \cap G) = 1/36$ diverso da $P(E)P(G) = (1/6)(1/12) = 1/72$

ESEMPIO 3 (come in ESEMPIO 2) Si lanciano due dadi ben equilibrati. Sia X_1 il valore del primo dado e X_2 il valore del secondo dado. Si considerino gli eventi $A = \{X_1 \text{ è pari}\}$ e $B = \{X_2 \text{ è pari}\}$

Gli eventi A e B sono indipendenti?

$P(A) = 1/2 [= (3 \cdot 6) / (6 \cdot 6)]$ $P(B) = 1/2 [= (6 \cdot 3) / (6 \cdot 6)]$ $P(A \cap B) = (3 \cdot 3) / (6 \cdot 6) = 1/4$

Si ha $P(A \cap B) = 1/4 = (1/2)(1/2) = P(A)P(B)$ QUINDI A e B sono eventi indipendenti

ESEMPIO 3 bis Siano A e B come in Esempio 3, e sia $C = \{X_1 + X_2 \text{ dispari}\}$

i) A e C sono indipendenti: infatti sappiamo che $P(A) = 1/2$

inoltre $P(C) = 18/36 = 1/2$ [si può calcolare come casi favorevoli/casi possibili, ma vedremo un altro modo]

Si noti che

$A \cap C = \{X_1 \text{ pari, e } X_1 + X_2 \text{ dispari}\} = \{X_1 \text{ pari, e } X_2 \text{ dispari}\} = A \cap B^c$

quindi

$P(A \cap C) = P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c)$ [per l'indipendenza di A e B] e quindi

$P(A \cap C) = P(A)P(B^c) = (1/2)(1/2) = P(A)P(C)$ c.v.d.

calcolo alternativo di P(C) si può osservare che

$C = \{X_1 + X_2 \text{ dispari}\} = \{(X_1 \text{ pari e } X_2 \text{ dispari}) \text{ oppure } (X_1 \text{ dispari e } X_2 \text{ pari})\} = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

per cui $P(C) = P((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) = P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) = P(A)P(B^c) + P(A^c)P(B) = (1/2)(1/2) + (1/2)(1/2) = 1/2$

ii) MOSTRARE che B e C sono indipendenti [per casa: la dimostrazione è identica al caso i)]

iii) $A \cap B$ e C NON SONO INDIPENDENTI (in senso probabilistico):

$(A \cap B) \cap C = \emptyset$ [infatti X_1 e X_2 entrambi pari, è incompatibile con $X_1 + X_2$ dispari]

quindi $P((A \cap B) \cap C) = 0 \neq P(A \cap B)P(C) [> 0]$

FINORA ABBIAMO VISTO DUE EVENTI PER VOLTA: COSA ACCADE QUANDO SI CONSIDERANO 3 EVENTI TUTTI INSIEME?

DEFINIZIONE: TRE EVENTI A, B, C SONO (GLOBALMENTE o COMPLETAMENTE) INDIPENDENTI SE

(*) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ e $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

[si dice anche che A, B e C formano una famiglia di eventi (globalmente o completamente) indipendenti]

AFFERMAZIONE:

la precedente proprietà è equivalente a chiedere che

()** $P(\tilde{A} \cap \tilde{B} \cap \tilde{C}) = P(\tilde{A})P(\tilde{B})P(\tilde{C})$ dove $\tilde{A}$ può essere A o A^c e $\tilde{B}$ può essere B o B^c e $\tilde{C}$ può essere C o C^c

(in totale $2^3 = 8$ relazioni)

[dimostrazione:

PRIMA PARTE: per vedere che (**) implica (*) notiamo che

$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ è valida prendendo $\tilde{A} = A$, $\tilde{B} = B$ e $\tilde{C} = C$

per ottenere $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ basta osservare che

$A \cap B = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c)$ da cui

$P(A \cap B) = P((A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c)) = P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C^c) = P(A)P(B)P(C) + P(A)P(B)P(C^c)$

$= P(A)P(B)[P(C) + P(C^c)] = P(A)P(B)1 = P(A)P(B)$

le altre relazioni si dimostrano in modo analogo

-----LA DIMOSTRAZIONE DELLA SECONDA PARTE E' STATA SVOLTA NELLA LEZIONE DI LUNEDI'

(ma la riporto qui per comodità) SECONDA PARTE: per vedere che (*) implica (**) vediamo che

$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ è valida

per ottenere, ad esempio,

$P(A \cap B \cap C^c) = P(A)P(B)P(C^c)$ possiamo procedere osservando che

$A \cap B = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c)$ da cui

$P(A \cap B) = P((A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c)) = P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C^c)$

la precedente uguaglianza, tenendo presente la (*), diviene

$P(A)P(B) = P(A)P(B)P(C) + P(A \cap B \cap C^c)$

da cui

$P(A \cap B \cap C^c) = P(A)P(B) - P(A)P(B)P(C) = P(A)P(B)[1 - P(C)] = P(A)P(B)P(C^c)$

le relazioni $P(A \cap B^c \cap C) = P(A)P(B^c)P(C)$ e $P(A^c \cap B \cap C) = P(A^c)P(B)P(C)$ si ottengono in modo analogo

e da queste si ottengono anche

$P(A \cap B^c \cap C^c) = P(A)P(B^c)P(C^c)$

infatti

$A \cap B^c = (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c)$ da cui

$P(A \cap B^c) = P((A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c)) = P(A \cap B^c \cap C) + P(A \cap B^c \cap C^c)$.

La precedente uguaglianza, tenendo presente la (*), il fatto che $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ implica $P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$ e il fatto che abbiamo già dimostrato che $P(A \cap B^c \cap C) = P(A)P(B^c)P(C)$ diviene

$P(A)P(B^c) = P(A)P(B^c)P(C) + P(A \cap B^c \cap C^c)$

da cui

$P(A \cap B^c \cap C^c) = P(A)P(B^c) - P(A)P(B^c)P(C) = P(A)P(B^c)[1 - P(C)] = P(A)P(B^c)P(C^c)$

e così via.

12) venerdì 22 marzo 2013 (SCIOPERO dei mezzi pochi studenti)

SONO STATI SVOLTI ALCUNI ESERCIZI, tra i quali:

Esercizio 3.9. (appunti Nappo-Spizzichino) Vengono lanciati contemporaneamente 5 dadi perfetti.

Calcolate la probabilità degli eventi elencati qui di seguito:

- a) {tutti i dadi danno punteggi diversi fra loro}
- b) {due dadi danno punteggi uguali fra loro e gli altri tre danno punteggi tutti diversi} ("coppia")
- c) {tre dadi danno punteggi uguali fra loro e gli altri due danno due punteggi diversi} ("tris")

- d) {quattro dadi danno punteggi uguali fra loro e uno da un punteggio diverso} ("poker")
- e) {tutti i dadi danno lo stesso punteggio} ("jazzi")
- f) {due diverse coppie di punteggi fra loro uguali e un punteggio diverso dagli altri due} ("doppia coppia")
- g) {tre punteggi uguali fra loro e gli altri due uguali fra loro e diversi dal precedente} ("full").

13) lunedì 25 marzo 2013

INDIPENDENZA DI tre eventi (seconda parte della dimostrazione della equivalenza delle due formulazioni)

INDIPENDENZA DI n EVENTI

n eventi $A_1, A_2, \dots, A_n$ si dicono indipendenti o che formano una famiglia di eventi indipendenti se e solo se

DEFINIZIONE 1

per ogni $k=2,3,\dots,n$ e per ogni scelta di $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$$

DEFINIZIONE 2

$$P(A^*_1 \cap A^*_2 \cap \dots \cap A^*_n) = P(A^*_1) P(A^*_2) \cdots P(A^*_n)$$

dove A^*_i può essere uguale ad A_i oppure al suo complementare $(A_i)^c$

LE DUE DEFINIZIONI SONO EQUIVALENTI

ESEMPIO GENERALE : n ESTRAZIONI CON REINSERIMENTO da un'URNA CON COMPOSIZIONE NOTA:

n ESTRAZIONI CON REINSERIMENTO da un'urna che contiene b palline bianche ed r palline rosse

Posto $B_i = \text{"i-sima pallina estratta bianca"}$ e $R_i = \text{"i-sima pallina estratta rossa"}$ ($= B_i^c$)

MOSTRIAMO CHE, SE LA COMPOSIZIONE E' NOTA ALLORA gli eventi $B_1, \dots, B_n$ sono indipendenti

CASO $n=3$

calcolo di $P(B_1) = b/(b+r)$ [$= b(b+r)(b+r)/(b+r)^3$]

calcolo di $P(B_2) = b/(b+r)$ [$= (b+r)b(b+r)/(b+r)^3$]

calcolo di $P(B_3) = b/(b+r)$ [$= (b+r)(b+r)b/(b+r)^3$]

da cui, posto $p=b/(b+r)$ si ha $P(B_i^c) = P(R_i) = r/(b+r) = 1-p$

calcolo di $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = (bbb)/(b+r)^3$ da cui $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1) P(B_2) P(B_3) = p^3$

calcolo di $P(B_1^c \cap B_2 \cap B_3) = (rbb)/(b+r)^3$ da cui $P(B_1^c \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1^c) P(B_2) P(B_3) = p^2(1-p)$

calcolo di $P(B_1 \cap B_2^c \cap B_3) = (brb)/(b+r)^3$ da cui $P(B_1 \cap B_2^c \cap B_3) = P(B_1) P(B_2^c) P(B_3) = p^2(1-p)$

calcolo di $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3^c) = (bbr)/(b+r)^3$ da cui $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3^c) = P(B_1) P(B_2) P(B_3^c) = p^2(1-p)$

calcolo di $P(B_1^c \cap B_2^c \cap B_3) = (rrb)/(b+r)^3$ da cui $P(B_1^c \cap B_2^c \cap B_3) = P(B_1^c) P(B_2^c) P(B_3) = p(1-p)^2$

calcolo di $P(B_1^c \cap B_2 \cap B_3^c) = (rbr)/(b+r)^3$ da cui $P(B_1^c \cap B_2 \cap B_3^c) = P(B_1^c) P(B_2) P(B_3^c) = p(1-p)^2$

calcolo di $P(B_1 \cap B_2^c \cap B_3^c) = (brr)/(b+r)^3$ da cui $P(B_1 \cap B_2^c \cap B_3^c) = P(B_1) P(B_2^c) P(B_3^c) = p(1-p)^2$

calcolo di $P(B_1^c \cap B_2^c \cap B_3^c) = (rrr)/(b+r)^3$ da cui $P(B_1^c \cap B_2^c \cap B_3^c) = P(B_1^c) P(B_2^c) P(B_3^c) = (1-p)^3$

proseguendo si capisce che per calcolare $P(B_1^* \cap B_2^* \cap B_3^*)$ basta contare il numero delle volte in cui $B_i^* = B_i$, e posto k questo numero, di modo che necessariamente nelle restanti volte $(3-k)$ $B_i^* = B_i^c$ e si ha

$$P(B_1^* \cap B_2^* \cap B_3^*) = p^k (1-p)^{(3-k)}$$

CASO n generico

Più in generale, per n estrazioni CON REISERIMENTO

si ha che, per $L \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, e J il suo complemento, ossia $L \cup J = \{1, 2, \dots, n\}$ e $J = L^c$ (e quindi $|J| = n - |L|$)

$$P\left(\bigcap_{\ell \in L} B_\ell\right) \cap \left(\bigcap_{j \in J} R_j\right) = b^{|L|} r^{n-|L|} / (b+r)^n = (b/(b+r))^{|L|} \cdot (r/(b+r))^{n-|L|}$$

e quindi, posto $p=b/(b+r)$ (da cui $r/(b+r)=1-p$)

$$P\left(\bigcap_{\ell \in L} B_\ell\right) \cap \left(\bigcap_{j \in J} R_j\right) = p^{|L|} (1-p)^{n-|L|}$$

e anche qui SE LA COMPOSIZIONE E' NOTA ALLORA gli eventi B_i sono indipendenti

Problema del calcolo della probabilità che il numero $X^A B_n$ di palline bianche estratte sia (esattamente) k

$$P(X^A B_n = k) = C_n^k b^k r^{n-k} / (b+r)^n = C_n^k (b/(b+r))^k (r/(b+r))^{n-k}, \text{ per } k=0, 1, \dots, n-1, n$$

$$\text{ossia } P(X^A B_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \text{ per } k=0, 1, \dots, n-1, n$$

ATTENZIONE il fatto che la composizione è nota è fondamentale per l'indipendenza degli eventi B_i

ESEMPIO PARTICOLARE di: SE LA COMPOSIZIONE dell'urna non è nota GLI EVENTI B_i NON SONO INDIPENDENTI

nel caso di due estrazioni CON reinserimento di un'urna (sempre la stessa) scelta a caso fra due urne, con composizioni diverse, ad esempio 3 bianche e 3 rosse per la prima e 2 bianche e 4 rosse per la seconda. In questo caso

$$P(B_1) = P(B_1|H_1)P(H_1) + P(B_1|H_2)P(H_2) = P(B_2) = P(B_2|H_1)P(H_1) + P(B_2|H_2)P(H_2) =$$

$$= (3/6)(1/2) + (2/6)(1/2) = 5/12,$$

$$\text{ma } P(B_1 \cap B_2) = P(B_1 \cap B_2 | H_1)P(H_1) + P(B_1 \cap B_2 | H_2)P(H_2) = (3/6)^2 (1/2) + (2/6)^2 (1/2) = (9+4)/72 = 13/72$$

e però $13/72 = P(B_1 \cap B_2) \neq P(B_1) P(B_2) = (5/12)^2 = 25/144$ (cioè B_1 e B_2 NON sono INDIPENDENTI!!!!)

(infatti si ha $13/72 = 26/144 > 25/144$)

14) mercoledì 27 marzo 2013

STESSO PROBLEMA CON TRE TIPI DI PALLINE (quindi multinomiale)

CENNI A PARTIZIONI INDIPENDENTI ossia il caso di estrazioni CON REINSERIMENTO da un'urna di COMPOSIZIONE NOTA, ma con più colori: ad esempio b palline bianche r rosse e g gialle

$$P(\tilde{E}_1 \cap \tilde{E}_2 \cap \dots \cap \tilde{E}_n) = P(\tilde{E}_1) P(\tilde{E}_2) \dots P(\tilde{E}_n)$$

dove

$$\tilde{E}_k = B_k \quad (B_k = k\text{-sima pallina stratta BIANCA})$$

oppure

$$\tilde{E}_k = R_k \quad (R_k = k\text{-sima pallina stratta ROSSA})$$

oppure

$$\tilde{E}_k = G_k \quad (G_k = k\text{-sima pallina stratta GIALLA})$$

(ossia $\tilde{A}_k$ è un elemento della partizione $\{B_k, R_k, G_k\}$ o addirittura dell'algebra generata dalla partizione $\{B_k, R_k, G_k\}$, ossia $\tilde{A}_k$ appartiene a $\{\emptyset, B_k, R_k, G_k, B_k \cup R_k, B_k \cup G_k, R_k \cup G_k, \Omega\}$)

Posto X_B il numero di palline estratte Bianche

X_R il numero di palline estratte Rosse

X_G il numero di palline estratte Gialle

calcolo di $P(X_B=k_1, X_R=k_2, X_G=k_3)$:

tale probabilità è positiva solo se k_i sono interi con $k_i \geq 0$, e $k_1+k_2+k_3=n$

e in tale caso sia ha, posto $p_B = b/(b+r+g)$, $p_R = r/(b+r+g)$, $p_G = g/(b+r+g)$

$$P(X_B=k_1, X_R=k_2, X_G=k_3) = n!/(k_1! k_2! k_3!) p_B^{k_1} p_R^{k_2} p_G^{k_3},$$

Infatti tale evento è l'unione di eventi (disgiunti a due a due) del tipo

$(\bigcap_{\ell \in L} B_\ell) \cap (\bigcap_{j \in J} R_j) \cap (\bigcap_{i \in I} G_i)$, dove L, J e I sono sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$ e formano una partizione di $\{1, \dots, n\}$ e con $|L|=k_1$, $|J|=k_2$ e $|I|=k_3$.

Tutti questi eventi hanno la stessa probabilità $p_B^{k_1} p_R^{k_2} p_G^{k_3}$ e sono tanti quanti gli anagrammi che si possono formare con k_1 lettere B, k_2 lettere R e k_3 lettere G.

OSSERVAZIONE il numero delle terne k_1, k_2 e k_3 per cui la probabilità è strettamente positiva, ossia il numero delle soluzioni di

$$k_i \geq 0, \text{ e } k_1 + k_2 + k_3 = n$$

si può calcolare e più in generale si trova che il numero delle soluzioni per cui

$$k_i \geq 0, \text{ e } k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$$

è uguale al numero delle COMBINAZIONI di $n+r-1$ elementi di classe $r-1$

Calcolo di $P(X_B=k)$:

ci si riduce al caso di un'urna con b palline Bianche e $r+g$ NON bianche e quindi

$$P(X_B=k) = C^n_k p_B^k (1-p_B)^{n-k}$$

per $k=0,1,\dots,n$

Calcolo di $P(X_B=k_1, X_R=k_2, X_G=k_3)$:

se $k_i \geq 0$, e $k_1 + k_2 \leq n$

$$P(X_B=k_1, X_R=k_2) = P(X_B=k_1, X_R=k_2, X_G=n-k_1-k_2)$$

$$= n!/(k_1! k_2! (n-k_1-k_2)!) p_B^{k_1} p_R^{k_2} p_G^{(k_1+k_2)}$$

$$= n!/(k_1! k_2! (n-k_1-k_2)!) p_B^{k_1} p_R^{k_2} (1-p_B-p_R)^{(k_1+k_2)}$$

mentre vale 0 in tutti gli altri casi.

Svolto parte dell'Esercizio 3 del compito di aprile 2012 (I esonero)

SOLUZIONI SU TWIKI

<http://twiki.dsi.uniroma1.it/twiki/viewfile/CP/WebHome?rev=1;filename=testo-e-soluzioni-scannerizzate-I-prova-in-itinere-aprile-2012-con Commenti.pdf>

venerdì 29 marzo 2013 vacanze di PASQUA

lunedì 1 aprile 2013 vacanze di PASQUA

15) mercoledì 3 aprile 2013

Svolti gli Esercizi del compito di aprile 2012 (l'esonero)

con domande aggiuntive ad esempio, in esercizio 3 aggiunta la domanda vi) gli eventi A e D $\cup$ E sono indipendenti?

in Esercizio 1 TRIS, FULL, POKER con un mazzo da 32 carte

e con estrazioni in blocco da un'urna con differenti colori

SOLUZIONI del compito SU TWIKI

http://twiki.dsi.uniroma1.it/twiki/viewfile/CP/WebHome?rev=1;filename=testo-e-soluzioni-scannerizzate-l-prova-in-itinere-aprile-2012-con_commenti.pdf

16) venerdì 5 aprile 2013

EVENTI CORRELATI POSITIVAMENTE e NEGATIVAMENTE definizione, proprietà ed esempi.

Definizione di due eventi correlati positivamente e correlati negativamente:

nel caso di eventi con probabilità positiva: A e B sono correlati positivamente se $P(A|B) > P(A)$

o equivalentemente $P(A \cap B) > P(A)P(B)$

Gli eventi A e B sono correlati negativamente se invece $P(A|B) < P(A)$ o equivalentemente $P(A \cap B) < P(A)P(B)$

(ATTENZIONE SU ALCUNI TESTI VIENE DATA LA DEFINIZIONE CON le disuguaglianze del tipo $P(A|B) \geq P(A)$

o equivalentemente $P(A \cap B) \geq P(A)P(B)$ invece che disuguaglianze strette)

Dimostrazione di alcune proprietà relative: ad esempio se A e B sono correlati positivamente allora A e B^c (B complementare) sono correlati negativamente [e quindi A^c e B^c sono correlati positivamente].

ESEMPI tra cui: Estrazioni con reinserimento da un'urna di composizione incognita

Se H_i sono una partizione che rappresenta le possibili composizioni dell'urna (con palline di tipo A e B) e posto B₁ e B₂ rispettivamente "la prima pallina estratta è di tipo B" e "la seconda pallina estratta è di tipo B" si ha che

B₁ e B₂ sono correlati positivamente (o più in generale se B₁ e B₂ sono eventi condizionatamente indipendenti e con la stessa probabilità condizionata, ossia $P(B_1 \cap B_2 | H_i) = P(B_1 | H_i)P(B_2 | H_i)$)

Senza dimostrazione, ma solo constatato in un caso particolare, tuttavia diamo qui una dimostrazione, nel caso in cui

siano possibili solo due composizioni H_1 e H_2 :

infatti

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1 \cap B_2 | H_1)P(H_1) + P(B_1 \cap B_2 | H_2)P(H_2) = (\text{per l'indipendenza condizionata})$$

$$= P(B_1 | H_1)P(B_2 | H_1)P(H_1) + P(B_1 | H_2)P(B_2 | H_2)P(H_2)$$

e

$$P(B_1) = P(B_1 | H_1)P(H_1) + P(B_1 | H_2)P(H_2)$$

$$P(B_2) = P(B_2 | H_1)P(H_1) + P(B_2 | H_2)P(H_2)$$

Dimostrare che

$$P(B_1 \cap B_2) > P(B_1)P(B_2), \text{ equivale a dimostrare che}$$

$$(x_1)^2 t + (x_2)^2 (1-t) > (x_1 t + x_2 (1-t))^2,$$

dove si è posto

$$x_1 := P(B_1 | H_1) = P(B_2 | H_1), \quad x_2 := P(B_1 | H_2) = P(B_2 | H_2), \quad \text{e } t := P(H_1) \text{ per cui } 1-t := P(H_2)$$

la verifica di

$$(x_1)^2 t + (x_2)^2 (1-t) > (x_1 t + x_2 (1-t))^2 = (x_1)^2 t^2 + 2 t(1-t) x_1 x_2 + (1-t)^2 (x_2)^2$$

equivale a

$$(x_1)^2 (t-t^2) + (x_2)^2 [1-t - (1-t)^2] - 2 t(1-t) x_1 x_2 > 0$$

$$\text{Ossia (essendo } 1-t - (1-t)^2 = 1-t - (1-2t+t^2) = t-t^2 = t(1-t))$$

$$(x_1)^2 t(1-t) + (x_2)^2 t(1-t) - 2 t(1-t) x_1 x_2 = t(1-t) (x_1 - x_2)^2 > 0$$

(che è sempre vera tranne, al minimo può valere 0, ma solo se $t=0$ o $t=1$ (cioè $P(H_1)=0$ o $P(H_2)=0$, oppure se $x_1=x_2$, ma allora la composizione delle due urne sono, dal punto di vista probabilistico, identiche, ossia $P(B_i | H_1) = P(B_i | H_2)$).

Svolti alcuni esercizi dal foglio di tutoraggio del 7 aprile 2010 (per matematici)

link: http://www.mat.uniroma1.it/people/nappo/compiti-CP1-2009-10/FOSCHI-Es_07_04-BIS.pdf

Esercizio 1. Se lanciamo un dado 4 volte, calcolare la probabilità che il 6 compaia

1. almeno una volta;
2. esattamente 2 volte;
3. almeno 3 volte.

Esercizio 2. Una professoressa assegna agli studenti 10 problemi, informandoli che l'esame consisterà in 5 di questi scelti a caso. Se uno studente è riuscito a risolverne 7, calcolare la probabilità che risponda esattamente a

1. esattamente a 5 dei problemi dell'esame;
2. almeno 4 dei problemi dell'esame.

Esercizio 3. In un test a risposta multipla, con 3 possibili risposte per ognuna delle 5 domande, calcolare la probabilità che uno studente risponda correttamente a 4 o più domande tentandole in maniera casuale.

Esercizio 4. Due squadre di scacchi sono formate rispettivamente da 8 e 9 giocatori. Da ognuna di esse, ne vengono selezionati in maniera casuale 4, per partecipare ad una gara. Le coppie vengono formate abbinando in maniera casuale ogni giocatore selezionato dalla prima squadra con un giocatore selezionato dalla seconda squadra. Rebecca ed Elisa fanno parte ognuna di una squadra. Calcolare la probabilità che

1. solo una tra Rebecca ed Elisa sia scelta per la gara;
2. entrambe siano scelte, ma non giochino una contro l'altra;
3. giochino una contro l'altra.

Esercizio 5. Supponiamo che la probabilità che un figlio sia maschio o femmina sia uguale.

Una coppia ha 5 figli; calcolare la probabilità che

1. tutti i figli siano dello stesso sesso;
2. i 3 maggiori siano maschi e le altre femmine;
3. vi siano esattamente 3 maschi;
4. i 2 maggiori siano femmine;
5. vi sia almeno una femmina.

Esercizio 6. Due fabbriche, A e B, producono radio. Ogni radio prodotta dalla fabbrica A è difettosa con probabilità 0,05, mentre ogni radio prodotta dalla fabbrica B è difettosa con probabilità 0,01. Supponiamo di aver acquistato due radio prodotte dalla stessa fabbrica, che può essere con uguale probabilità A o B. Se la prima radio è difettosa, calcolare la probabilità che lo sia anche la seconda (Soluzione dell' Esercizio 6 solo accennata).

Esercizio 7. Il 45% degli elettori di un comune si ritiene di centro, il 30% di sinistra e il 25% di destra. Nell'ultima elezione si sono recati a votare il 40% degli elettori di centro, il 50% di quelli di sinistra e il 60% di quelli di destra. Un elettore è estratto a caso. Sapendo che ha votato nelle ultime elezioni, calcolare la probabilità che si tratti di un elettore

1. di centro;
2. di sinistra;
3. di destra.

Quale percentuale di elettori ha partecipato all'ultima elezione?

(Esercizio 7 non svolto)

17) lunedì 8 aprile 2013

STUDIO DEL COMPORTAMENTO LIMITE delle estrazioni senza reinserimento da un'urna con m_A palline di colore ARANCIONE e m_B di colore BLU, quando il numero $M=m_A+m_B$ di palline nell'urna tende ad infinito, e la proporzione m_A/M delle palline di tipo A rimane invariata, ovvero quando m_A/M tende a p , con $p \in [0,1]$ (e quindi $m_B/M=(M-m_A)/M=1-m_A/M$ tende a $1-p$)

Si ottiene che al LIMITE, la valutazione delle probabilità si comporta in modo molto simile alla valutazione delle probabilità nel caso di estrazioni con reinserimento.

PER CAPIRE l'idea iniziamo da un esempio:

Sia $m_A=1$ e $m_B=3$ e siano A_1, A_2 e A_3 gli eventi "prima estratta di tipo A (o arancione)", "seconda estratta di tipo A (o arancione)" e "terza estratta di tipo A (o arancione)" rispettivamente e, analogamente, B_1, B_2 e B_3 gli eventi "prima estratta di tipo B (o blu)", "seconda estratta di tipo B (o blu)" e "terza estratta di tipo B (o blu)" rispettivamente. Se indichiamo con P_{con} e P_{senza} le probabilità nel caso CON REINSERIMENTO e SENZA REINSERIMENTO, rispettivamente, ovviamente le probabilità $P_{con}(B_i)$ e $P_{senza}(B_i)$ sono uguali e valgono $3/4$, mentre le probabilità degli eventi

$$P_{con}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = (3/4)^3 = 0,421875$$

e

$$P_{\text{senza}}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P_{\text{senza}}(B_1) P_{\text{senza}}(B_2 | B_1) P_{\text{senza}}(B_3 | B_1 \cap B_2) = (3/4)(2/3)(1/2) = 1/4 = 0,25$$

sono molto differenti.

Se però consideriamo un'urna che contiene **m_A=10 palline di tipo A (o arancione) e m_B=30 di tipo B (o blu)**

$$\text{allora si ha ancora che } P_{\text{con}}(B_i) = P_{\text{senza}}(B_i) = 30/40 = 3/4, \text{ e } P_{\text{con}}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = (3/4)^3 = 0,421875$$

$$\text{ma } P_{\text{senza}}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P_{\text{senza}}(B_1) P_{\text{senza}}(B_2 | B_1) P_{\text{senza}}(B_3 | B_1 \cap B_2) = (30/40)(29/39)(28/38) = 0,41093117408906882591093117408907$$

I valori $P_{\text{con}}(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$ e $P_{\text{senza}}(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$ sono ancora differenti, ma sono molto più vicini.

Se invece consideriamo un'urna che contiene **m_A=100 palline di tipo A (o arancione) e m_B=300 di tipo B (o blu)**

$$\text{allora si ha ancora che } P_{\text{con}}(B_i) = P_{\text{senza}}(B_i) = 300/400 = 3/4, \text{ e } P_{\text{con}}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = (3/4)^3 = 0,421875$$

$$\text{ma } P_{\text{senza}}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P_{\text{senza}}(B_1) P_{\text{senza}}(B_2 | B_1) P_{\text{senza}}(B_3 | B_1 \cap B_2) = (300/400)(299/399)(298/398) = 0,42081648845732421506026372463823$$

I valori $P_{\text{con}}(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$ e $P_{\text{senza}}(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$ sono ancora differenti, ma i valori sono decisamente molto più vicini e sono uguali fino alla seconda cifra decimale.

Se poi consideriamo un'urna che contiene **m_A=1000 palline di tipo A (o arancione) e m_B=3000 di tipo B (o blu)**

$$\text{allora si ha ancora che } P_{\text{con}}(B_i) = P_{\text{senza}}(B_i) = 3000/4000 = 3/4, \text{ e } P_{\text{con}}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = (3/4)^3 = 0,421875$$

$$\text{ma } P_{\text{senza}}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P_{\text{senza}}(B_1) P_{\text{senza}}(B_2 | B_1) P_{\text{senza}}(B_3 | B_1 \cap B_2) = (3000/4000)(2999/3999)(2998/3998) = 0,42176949314867486256256410275655$$

I valori $P_{\text{con}}(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$ e $P_{\text{senza}}(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$ sono ancora differenti, ma sono uguali fino alla terza cifra decimale.

Più in generale si può vedere che

$$P_{\text{senza}}(A_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap A_4 \cap B_5 \cap B_6 \cap A_7) =$$

$$= (m_A/M) [m_B/(M-1)] [(m_B-1)/(M-2)] [(m_A-1)/(M-3)] [(m_B-2)/(M-4)] [(m_B-3)/(M-5)] [(m_A-2)/(M-6)]$$

ossia un prodotto di 7 fattori di cui quattro del tipo $[(m_B-i)/(M-j)]$ e tre del tipo $[(m_A-h)/(M-k)]$

ora $[(m_A-h)/(M-k)] = [(m_A/M-h/M)/(1-k/M)]$ che tende a p quando M tende all'infinito

mentre

$$[(m_B - i)/(M - j)] = [(m_B/M - i/M)/(1 - j/M)] \text{ tende a } 1 - p$$

e quindi $P_{\text{senza}}(A_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap A_4 \cap B_5 \cap B_6 \cap A_7)$ tende a $p^3 (1-p)^4$

Più in generale si ha che se si considera il numero n delle estrazioni fissato, mentre M , m_A ed m_B che tendono ad infinito con $m_A/M = p$ (o che tende a p) e quindi $m_B/M = 1 - p$ (o che tende a $1 - p$) si ha che, posto X_A il numero di palline estratte di tipo A , per ogni $k = 0, 1, \dots, n$

$P(X_A = k)$ tende a $C^n_k p^k (1-p)^{n-k}$ (quindi a probabilità binomiali, come se fossero estrazioni senza reinserimento)

(per coloro interessati alla dimostrazione, si vedano, ad esempio, gli appunti

<http://www.mat.uniroma1.it/people/nappe/CPE-appunti/Spizzichino-Nappe-CP1-versione-7giugno-2011.pdf>

pagine 60 e 61)

Questa osservazione permette di capire perché, spesso nei sondaggi, in cui si chiedono le opinioni di circa un migliaio di persone in rappresentanza di una popolazione di molti milioni di persone, si usa uno schema di estrazioni con reinserimento, invece che quello più corretto, ma meno semplice delle estrazioni senza reinserimento.

Si segnala a questo proposito il file "Caccia all'errore",

link sulla pagina web del corso di Probabilità 1 (per Matematici) a.a. 2009-10:

http://www.mat.uniroma1.it/people/nappe/compiti-CP1-2009-10/IMBROGLI_AL_LOTTO.html

dove un chimico, abituato a trattare le estrazioni con e senza reinserimento nello stesso modo, lo fa anche trattando il gioco del lotto (l'articolo è tratto da un articolo del Giornale La Repubblica del **13 ottobre 1996** - <http://ricerca.repubblica.it/repubblica/archivio/repubblica/1996/10/13/perche-al-lotto-si-puo-solo-perdere.html>)

(Attenzione nel lavoro di un chimico questa "confusione" è lecita, perché i chimici si occupano di reazioni chimiche dove le palline sono atomi e una reazione avviene se si "incontrano" gli atomi giusti: sostanzialmente se si estraggono le palline del colore giusto, ad esempio per fare una molecola di acqua si devono incontrare due atomi di idrogeno e uno di ossigeno. Se si trattasse questo problema come l'estrazione di tre palline da un'urna che ne contiene N di cui N_H di idrogeno, N_O di ossigeno (sia che $N = N_H + N_O$ o che sia maggiore, ossia nel caso ci siano anche altri atomi e quindi $N > N_H + N_O$) tale probabilità vale $\frac{3 N_O N_H (N_H - 1)}{N(N-1)(N-2)}$, ma il numero di atomi presenti è enorme, dell'ordine del numero di Avogadro ossia 10^{23} e quindi la differenza con $\frac{3 (N_O/N) (N_H/N)^2}{N}$ è piccolissima)

Svolti alcuni esercizi dal foglio di tutoraggio del 16 marzo 2010 (per matematici)

link: http://www.mat.uniroma1.it/people/nappe/compiti-CP1-2009-10/FOSCHI-Es_16_03.pdf

Esercizio 1. Si fanno n lanci di una moneta perfetta. Per $1 \leq h \leq n$, calcolare la probabilità di ottenere il risultato testa

1. all' h -esimo lancio;
2. per la prima volta all' h -esimo lancio.

Generalizzazione della domanda 2. al caso in cui la moneta non fosse perfetta, e posto $A_h =$ "all' h -esimo lancio esce testa" e supposto che $P(A_h) = p$ e che gli eventi A_h formano una famiglia di eventi stocasticamente indipendenti

RISPOSTA: Si ha che l'evento "la prima volta che esce testa è l' h -esima" = $(A_1)^c \cap (A_2)^c \cap \dots \cap (A_{h-1})^c \cap A_h$

e quindi

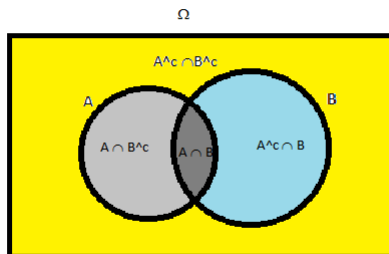
$$P((A_1)^c \cap (A_2)^c \cap \dots \cap (A_{h-1})^c \cap A_h) = P(A_1)^c P((A_2)^c) \dots P((A_{h-1})^c) P(A_h) = (1-p)^{h-1} p$$

Esercizio 2. Siano A; B eventi tali che $P(A \cup B) = 1$ e $P(A \cap B) = 1/3$.

- Quanto vale $P(A) + P(B)$?
- Qual è il valore massimo che può assumere $P(A)$?
- Qual è il valore minimo che può assumere $P(A)$?
- Quanto vale $P(A^c \cap B^c)$?
- Quanto vale $P(A^c \cup B^c)$?
- Imponendo $P(A) = P(B)$, quanto vale $P(A)$?

SUGGERIMENTI: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ e quindi $P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$,

$$P(A \cap B) = 1/3, P(A \cap B^c) = a, P(A^c \cap B) = b/3 - a, P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 0, P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c)$$



Esercizio 3. Un numero di telefono di 6 cifre viene composto digitando a caso sulla tastiera (10 tasti). Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

- il numero composto è 121212 o 094816;
- il numero composto non contiene il 6;
- il numero composto contiene solo cifre pari;
- il numero composto contiene la stringa 2345;
- il numero composto contiene la stringa 2222.
 - $P_a = 2/10^6$, $p_b = 9^6/10^6$ c) (consideriamo 0 come numero pari) $p_c = 5^6/10^6$
 - i casi favorevoli sono del tipo 2345*, dove * significa una cifra qualunque (e sono 10^2) oppure *2345* (e sono 10^2) oppure 2345** (e sono 10^2) quindi $p_d = 3 \cdot 10^2/10^6 = 3/10^4$
 - posto A_1 l'evento "le prime 4 cifre sono tutte 2" (ossia del tipo 2222**), A_2 ="le cifre dalla seconda alla quinta sono tutte 2" (ossia del tipo *2222*), e A_3 ="le ultime 4 cifre sono tutte 2" (ossia del tipo **2222) si ha

$$p_e = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = (\text{formula di inclusione ed esclusione}) \\ = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Poiché $A_1 \cap A_2$ = "le prime 5 cifre tutte uguali a 2" (ossia 22222*),

$A_1 \cap A_3$ = $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ = "tutte le cifre uguali a 2" (ossia 22222)

$A_2 \cap A_3$ = "le ultime cinque cifre tutte uguali a 2" (ossia *22222)

$$p_d = 3 \cdot (10^2/10^6) - 2 \cdot (10/10^6) = 28/10^5$$

SOLUZIONE ALTERNATIVA

Posto "o" per una cifra diversa da 2, i casi favorevoli sono del tipo

2222oo (e sono 9^2) oppure o2222o (e sono 9^2) oppure oo2222 (e sono 9^2)

22222o (e sono 9) oppure o22222 (e sono 9) oppure 222222 (ed è 1 sola)

INOLTRE ci sono anche quelle del tipo

222202 (e sono 9) oppure 2o2222 (e sono 9)

In totale i casi favorevoli sono $3 \cdot 81 + 4 \cdot 9 + 1 = 243 + 36 + 1 = 280$

$$\text{Quindi } p_d = 280/10^6 = 28/10^5.$$

Esercizio 4. Uno studente possiede 4 libri di algebra, 7 di calcolo/analisi e 5 di geometria. I libri vengono disposti a caso su uno scaffale. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

- a) il primo libro a sinistra è di geometria e il secondo di algebra;
- b) i libri di ogni materia sono contigui;
- c) i libri di ogni materia sono in ordine alfabetico, ma non necessariamente contigui;
- d) i libri di ogni materia sono in ordine alfabetico e contigui.

I casi possibili son 16! infatti possiamo indicare

con A_1, A_2, A_3, A_4 , i quattro libri di Algebra, in ordine alfabetico,

con $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$, i sette libri di Calcolo/Analisi, in ordine alfabetico e infine

con G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 , i cinque libri di Geometria, in ordine alfabetico.

a) casi favorevoli: $5 \cdot 4 \cdot 14!$ Quindi $p_a = (5/16)(4/15)$

b) i casi possibili sono del tipo

$A_{j1}, A_{j2}, A_{j3}, A_{j4}, C_{k1}, C_{k2}, C_{k3}, C_{k4}, C_{k5}, C_{k6}, C_{k7}, G_{h1}, G_{h2}, G_{h3}, G_{h4}, G_{h5}$, oppure

$A_{j1}, A_{j2}, A_{j3}, A_{j4}, G_{h1}, G_{h2}, G_{h3}, G_{h4}, G_{h5}, C_{k1}, C_{k2}, C_{k3}, C_{k4}, C_{k5}, C_{k6}, C_{k7}$, oppure

$C_{k1}, C_{k2}, C_{k3}, C_{k4}, C_{k5}, C_{k6}, C_{k7}, A_{j1}, A_{j2}, A_{j3}, A_{j4}, G_{h1}, G_{h2}, G_{h3}, G_{h4}, G_{h5}$, oppure

$C_{k1}, C_{k2}, C_{k3}, C_{k4}, C_{k5}, C_{k6}, C_{k7}, G_{h1}, G_{h2}, G_{h3}, G_{h4}, G_{h5}, A_{j1}, A_{j2}, A_{j3}, A_{j4}$, oppure

$G_{h1}, G_{h2}, G_{h3}, G_{h4}, G_{h5}, A_{j1}, A_{j2}, A_{j3}, A_{j4}, C_{k1}, C_{k2}, C_{k3}, C_{k4}, C_{k5}, C_{k6}, C_{k7}$, oppure

$G_{h1}, G_{h2}, G_{h3}, G_{h4}, G_{h5}, C_{k1}, C_{k2}, C_{k3}, C_{k4}, C_{k5}, C_{k6}, C_{k7}, A_{j1}, A_{j2}, A_{j3}, A_{j4}$,

e sono $3! \cdot 4! \cdot 7! \cdot 5!$

Quindi $p_b = (3! \cdot 4! \cdot 7! \cdot 5!) / 16!$

c) I casi favorevoli sono tanti quanti gli anagrammi possibili con quattro A, sette C e cinque G

Ad esempio all'anagramma GCACGAACCCGGAGCC corrisponde il seguente ordinamento nello scaffale

$G_1 C_1 A_1 C_2 G_2 A_2 A_3 C_3 C_4 C_5 G_3 G_4 A_4 G_5 C_6 C_7$ ossia $16! / (4! \cdot 7! \cdot 5!)$ e quindi

$p_c = [16! / (4! \cdot 7! \cdot 5!)] / 16! = 1 / (4! \cdot 7! \cdot 5!)$

d) I casi favorevoli sono solo 3! Quante le permutazioni degli elementi (a,c,g) e quindi

$p_d = 3! / 16!$

ed esattamente i sei casi favorevoli sono

$A_1, A_2, A_3, A_4, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5,$

$A_1, A_2, A_3, A_4, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7,$

$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, A_1, A_2, A_3, A_4, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5,$

$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, A_1, A_2, A_3, A_4,$

$G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, A_1, A_2, A_3, A_4, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7,$

$G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, A_1, A_2, A_3, A_4,$

18) mercoledì 10 aprile 2013

Svolti alcuni esercizi del compito di esonero di aprile 2011 per matematici

SOLUZIONI su TWIKI <http://twiki.dsi.uniroma1.it/twiki/viewfile/CP/WebHome?rev=1;filename=soluzioni-esonero1-aprile-2011-Matematici.pdf>

19) venerdì 12 aprile 2013

Numero di successi su n prove indipendenti, Eventi condizionatamente indipendenti, rispetto a una partizione,

Svolti alcuni esercizi .

settimana dal 15 al 19 aprile PROVE IN ITINERE

lunedì 15 aprile 2013

mercoledì 17 aprile 2013 (I prova in itinere) orario 14,15-17,15

venerdì 19 aprile 2013

20) lunedì 22 aprile 2013

Correzione degli esercizi della prova in itinere

21) mercoledì 24 aprile 2013

Introduzione alle variabili aleatorie, definizione ed esempi.

Caso delle variabili aleatorie discrete; definizione di densità discreta di una variabile aleatoria.

DEFINIZIONE DI VARIABILE ALEATORIA DISCRETA, in spazi di probabilità finiti.

In uno spazio di probabilità FINITO $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, con $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ ed $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$,

una funzione $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega_i \rightarrow X(\omega_i)$

è una variabile aleatoria DISCRETA, [in quanto $X(\Omega)$ è finito], ossia

$X(\Omega) = \{x_k, \text{ per } k=1,2,\dots,n\}$.

NOTA BENE per indicare le variabili aleatorie si usano di solito le lettere MAIUSCOLE X,Y,Z, U,V,W, R,S,T, (nella parte finale dell'alfabeto, ma a volta anche L, M, N), mentre di solito le lettere MAIUSCOLE A,B,C,D,E, F, G, H si

usano per gli eventi (ovviamente a volte si deroga da questa convenzione, ma l'importante è dichiarare all'inizio, se una lettera indica un evento o una variabile aleatoria)

Si definisce DENSITA' DISCRETA DI X la funzione

$$p: X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+, x_i p_X(x_k) := P(X=x_k)$$

Una densità discreta è caratterizzata dalle seguenti proprietà

per ogni $k=1, \dots, n$, $p_X(x_k) \geq 0$ [in realtà appartiene a $[0,1]$]

$$\text{e } \sum_{k=1, \dots, n} p_X(x_k) = 1$$

PIU' IN GENERALE SI DEFINISCE UNA VARIABILE ALEATORIA DISCRETA (anche se Ω non è finito)

una funzione $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \rightarrow X(\omega)$, con $X(\Omega)$ finito o numerabile

ossia $X(\Omega) = \{x_k, \text{ per } k=1, 2, \dots, n\}$ oppure $X(\Omega) = \{x_k, \text{ per } k=1, 2, \dots, n, \dots\}$

e con $\{X=x_k\}$ un evento, per cui ha senso calcolare $P(X=x_k)$.

e la densità discreta di X si definisce in modo del tutto analogo.

Esempi di calcolo della densità discreta:

ESEMPIO 1

a partire dal lancio di due dadi equilibrati,

X_1 = punteggio del primo dado e X_2 = punteggio del secondo dado

$X = X_1 + X_2$ (punteggio totale ottenuto)

$Y = \max(X_1, X_2)$ (punteggio massimo)

$Z = \min(X_1, X_2)$ (punteggio minimo)

ESEMPIO 2 (dal Ross)

Da un'urna che contiene 3 palline blu, 3 rosse e 5 gialle, si estraggono (senza reinserimento) tre palline. Assumendo che si ottiene +1 per ogni pallina blu estratta, -1 per ogni pallina rossa estratta e 0 per ogni pallina gialla estratta, sia X il punteggio ottenuto.

Soluzione: i valori che la variabile aleatoria può assumere sono -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3

Dobbiamo individuare gli eventi del tipo $\{X=i\}$, per $i=-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$

$\{X=+3\}=\{\text{vengono estratte tre palline blu}\}$

$\{X=-3\}=\{\text{vengono estratte tre palline rosse}\}$

$\{X=+2\}=\{\text{vengono estratte due palline blu e una gialla}\}$

$\{X=-2\}=\{\text{vengono estratte due palline rosse e una gialla}\}$

$\{X=+1\}=\{\text{vengono estratte due palline blu e una rossa, OPPURE vengono estratte una pallina blu e due gialle}\}$

$\{X=-1\}=\{\text{vengono estratte due palline rosse e una blu OPPURE vengono estratte una pallina rossa e due gialle}\}$

$\{X=0\}=\{\text{vengono estratte una pallina blu una rossa e una gialla, OPPURE vengono estratte tre palline gialle}\}$

$$p_X(+3) = P(\{X=+3\}) \text{ [ma di solito si scrive } P(X=3) \text{]} = C^3_3 C^0_3 C^5_0 / C^{11}_3 = 1/(11 \cdot 10 \cdot 9/3 \cdot 2) = 1/165$$

$$p_X(-3) = P(\{X=-3\}) \text{ [ma di solito si scrive } P(X=-3) \text{]} = C^3_0 C^3_3 C^5_0 / C^{11}_3 = 1/(11 \cdot 10 \cdot 9/3 \cdot 2) = 1/165$$

$$p_X(+2) = P(\{X=+2\}) = C^3_2 C^3_0 C^5_1 / C^{11}_3 = (3 \cdot 5)/(11 \cdot 10 \cdot 9/3 \cdot 2) = 15/165$$

$$p_X(-2) = P(\{X=-2\}) = C^3_0 C^3_2 C^5_1 / C^{11}_3 = (3 \cdot 5)/(11 \cdot 10 \cdot 9/3 \cdot 2) = 15/165$$

$$p_X(+1) = P(\{X=+1\}) = C^3_2 C^3_1 C^5_0 / C^{11}_3 + C^3_1 C^3_0 C^5_2 / C^{11}_3 = (9+30)/(11 \cdot 10 \cdot 9/3 \cdot 2) = 39/165$$

$$p_X(-1) = P(\{X=-1\}) = C^3_1 C^3_2 C^5_0 / C^{11}_3 + C^3_0 C^3_1 C^5_2 / C^{11}_3 = (9+30)/(11 \cdot 10 \cdot 9/3 \cdot 2) = 39/165$$

Per calcolare $p_X(0)$ possiamo procedere in due modi:

$$p_X(0) = P(\{X=0\}) = 1 - [p_X(+1) + p_X(-1) + p_X(+2) + p_X(-2) + p_X(+3) + p_X(-3)] = 1 - 2((1+15+39) | 165) = (165-110) | 165$$

oppure, come per gli altri casi

$$p_X(0) = P(\{X=0\}) = C^3_1 C^3_1 C^5_1 / C^{11}_3 + C^3_0 C^3_0 C^5_3 / C^{11}_3 = (45+10)/(11 \cdot 10 \cdot 9/3 \cdot 2) = 55/165$$

ESEMPIO 3

Se la composizione dell'urna è la stessa dell'esempio 3, ma si fanno 4 estrazioni CON REINSERIMENTO e Y è il numero delle palline blu estratte si ha

$$p_Y(k) = C^4_k (3/11)^k (1-3/11)^{4-k}, \text{ per } k=0,1,2,3,4$$

ATTENZIONE

questo è un esempio di variabile aleatoria di tipo BINOMIALE ed esattamente Binomiale di parametri $n=4$ e $p=3/11$

(si dice anche che Y ha distribuzione Binomiale)

INOLTRE E' FONDAMENTALE INDICARE ANCHE QUALI SONO I VALORI che la variabile aleatoria assume

INFATTI

ESEMPIO 4

Se la composizione dell'urna è la stessa dell'esempio 3, ma si fanno 4 estrazioni SENZA REINSERIMENTO e Z è il numero delle palline blu estratte la risposta

$$p_Z(k) = P(Z=k) = C^3_k C^8_{(4-k)}$$

NON È SUFFICIENTE, bisogna specificare per quali valori è strettamente positiva

ATTENZIONE LA RISPOSTA

$$p_Z(k) = C^3_k C^8_{(4-k)} \text{ per } k=0,1,2,3,4$$

È SBAGLIATA perché ovviamente non è possibile ottenere 4 palline blu estraendo senza reinserimento da un'urna che contiene SOLO 3 palline blu

LA RISPOSTA GIUSTA è'

$$p_Z(k) = P(Z=k) = C^3_k C^8_{(4-k)} \text{ per } k=0,1,2,3,$$

ATTENZIONE Il caso precedente è un caso particolare di variabile aleatoria di tipo IPERGEOMETRICO

(si dice anche che Z ha distribuzione Ipergeometrica)

22) venerdì 26 aprile 2013

RIEPILOGO sui più importanti tipi di variabili aleatorie:

Definizione di variabili aleatorie DISCRETE Uniformi (la densità di probabilità è costante), ossia $p_X(x_k) = c$ per ogni x_k in $X(\Omega)$

OSSERVAZIONE: Le variabili aleatorie discrete uniformi hanno senso SOLO se $X(\Omega)$ è finito, e allora, posto $n = |X(\Omega)|$

si ha $c = 1/n$, poiché $p_X(x_k) = c \geq 0$ e $\sum_{k=1, \dots, n} p_X(x_k) = 1$, si ha $\sum_{k=1, \dots, n} p_X(x_k) = \sum_{k=1, \dots, n} c = nc = 1$.

Variabili aleatorie Binomiali, Variabili aleatorie Ipergeometriche.

Variabile di Poisson : si dice che X ha distribuzione di POISSON di parametro $\lambda > 0$, e si scrive $X \sim \text{POISS}(\lambda)$

se e solo se $X(\Omega) = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

e

$$p_X(k) = P(X=k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k! \text{ per } k \in \mathbb{N}.$$

NELLA PROSSIMA LEZIONE SI VEDRÀ COME NASCE NATURALMENTE COME APPROSSIMAZIONE DELLE VARIABILI ALEATORIE BINOMIALI $\text{BIN}(n, p)$, con n grande e p piccolo.

Variabile aleatoria Geometrica: sia $p \in (0,1)$; si dice che X ha distribuzione Geometrica di parametro p e si scrive

$X \sim \text{GEOM}(p)$ se e solo se $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots\}$

e

$p_X(k) = P(X=k) = (1-p)^k p$, per $k \geq 1$.

IL PROTOTIPO di variabile aleatoria Geometrica è il tempo di primo successo in un numero illimitato di prove globalmente indipendenti (si tratta di una successione di eventi A_k , per $k \geq 1$, [OSSIA che, comunque prendo un numero finito di eventi, questi formano una famiglia finita di eventi globalmente indipendenti]) e tutti CON LA STESSA PROBABILITA', ossia $P(A_k) = p$ per ogni $k \geq 1$:

$\{X=1\} = A_1$ $P(X=1) = P(A_1) = p$

$\{X=2\} = A_1^c \cap A_2$ $P(\{X=2\}) = P(A_1^c \cap A_2) = P(A_1^c) P(A_2) = (1-p) p$

$\{X=3\} = A_1^c \cap A_2^c \cap A_3$ $P(\{X=3\}) = P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) = P(A_1^c) P(A_2^c) P(A_3) = (1-p)^2 p$

.....

$\{X=k\} = A_1^c \cap \dots \cap A_{k-1}^c \cap A_k$

$P(\{X=k\}) = P(A_1^c \cap \dots \cap A_{k-1}^c \cap A_k) = P(A_1^c) \dots P(A_{k-1}^c) P(A_k) = (1-p)^{k-1} p$

PROPRIETA' DI MANCANZA DI MEMORIA delle v.a. GEOMETRICHE

(ossia perché i ritardi del lotto non ci danno nessuna informazione utile...)

per ogni $h, k \geq 1$: $P(X=k+h | X > k) = P(X=h)$ come a dire, se non ho avuto nessun successo nelle prime k prove, la probabilità che debba aspettare altre h prove per il primo successo è la stessa qualunque sia k , ossia è come ricominciare da capo, INFATTI

$P(X=k+h | X > k) = P(X=k+h, X > k) / P(X > k) = P(X=k+h) / P(X > k) = (1-p)^{k+h-1} p / (1-p)^{k-1} p = (1-p)^{h-1} p = P(X=h)$.

Cenni alle Variabili continue.

23) lunedì 29 aprile 2013

Teorema di APPROSSIMAZIONE DI POISSON, CON DIMOSTRAZIONE ED esempio di applicazione

ENUNCIATO (del TEOREMA DI POISSON)

Siano $X_{(n)}$ variabili aleatorie Bin $(n, p_{(n)})$, con $p_{(n)} = \lambda/n$, dove $\lambda > 0$ [ed n è tale che $\lambda/n < 1$, ossia $n > \lambda$]

Allora, per ogni $k=0,1,\dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_{(n)} = k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$$

DIM: per k fissato ed n maggiore di k si ha

$$\begin{aligned} P(X_{(n)} = k) &= C^k n^k (p_{(n)})^k (1 - p_{(n)})^{n-k} = [n(n-1) \dots (n-(k-1))] / k! (\lambda/n)^k (1-\lambda/n)^{n-k} \\ &= [\lambda^k / k!] (1-\lambda/n)^n (1-\lambda/n)^{-k} [n(n-1) \dots (n-(k-1))] / n^k \end{aligned}$$

Tenendo conto che

(i) $(1+x/n)^n$ converge ad e^x , per ogni x reale, e quindi $(1-\lambda/n)^n$ converge ad $e^{-\lambda}$

(ii) che, essendo k fissato, $(1-\lambda/n)^{-k}$ converge ad 1

(iii) che $[n(n-1) \dots (n-(k-1))] / n^k = [n/n] [(n-1)/n] \dots [(n-(k-1))/n]$ converge ad 1 (per j fissato $(n-j)/n$ converge ad 1)

Si ottiene che $P(X_{(n)} = k) = [\lambda^k / k!] (1-\lambda/n)^n (1-\lambda/n)^{-k} [n(n-1) \dots (n-(k-1))] / n^k$ converge a $e^{-\lambda} \lambda^k / k!$

APPROSSIMAZIONE DI POISSON: esempio di uso per il calcolo approssimato di probabilità relative a una variabile aleatoria $X_{(n)}$ di legge/distribuzione Bin (n,p) con n molto grande e p piccolo.

La probabilità $P(X_{(n)} = k) \cong e^{-\lambda} \lambda^k / k!$ con $\lambda = np$, ossia con $E(X) = E(X_{(n)})$

SIGNIFICATO:

Se X è una v.a. di tipo Bin (n, p) , con n "GRANDE" e p "piccolo" allora

$P(X = k)$ si approssima con $e^{-\lambda} \lambda^k / k!$ dove $\lambda = np$

L'approssimazione è buona per valori non troppo grandi di k e solo se $\lambda = np$ non è troppo grande

(in genere è bene utilizzare questa approssimazione solo nel caso in cui $\lambda = np$ sia minore di 10 e n maggiore di 100, oppure se $p \leq 0.05$ e $n \geq 20$)

ESEMPIO di APPLICAZIONE: E' noto che nei PC della marca XX, l'1% presenta dei difetti di fabbricazione.

Si supponga che ogni PC sia difettoso indipendentemente l'uno dall'altro.

Si prendono 200 PC. Posto X il numero dei PC difettosi

1) Trovare un'espressione per $P(X \leq 5)$

2) Trovare un valore approssimato per $P(X \leq 5)$

SOLUZIONE

1) Poiché supponiamo gli eventi "i-simo PC difettoso" globalmente indipendenti e tutti con la stessa probabilità $p=1\%=1/100$, la variabile aleatoria X è una variabile aleatoria Binomiale di parametri $n=200$ e $p=1/100$

(in simboli $X \sim \text{Bin}(200, 1/100)$), quindi

$$P(X \leq 5) = \sum_{k=0,1,\dots,5} P(X=k) = \sum_{k=0,1,\dots,5} C_{-k}^5 (1/100)^k (99/100)^{200-k}$$

2) visto che $n=200$ è "GRANDE" e $p=1/100$ è "piccola", tenendo conto dell'approssimazione di Poisson, è possibile trovare un'espressione approssimata per

$$P(X \leq 5) = \sum_{k=0,1,\dots,5} P(X=k).$$

QUINDI, posto $\lambda=np=200(1/100)=2$

$$P(X \leq 5) = \sum_{k=0,1,\dots,5} P(X=k) \cong \sum_{k=0,1,\dots,5} e^{-\lambda} \lambda^k / k! = e^{-2} \sum_{k=0,1,\dots,5} 2^k / k! = e^{-2} [1 + 2^1/1! + 2^2/2! + 2^3/3! + 2^4/4! + 2^5/5!]$$

$$= e^{-2} [1 + 2 + 2 + 4/3 + 2/3 + 4/15] = e^{-2} [5 + 6/3 + 4/15] = e^{-2} [7 + 4/15] = e^{-2} 109/15 \cong 0,983$$

L'espressione approssimata è più semplice dell'espressione "giusta, e possiamo affermare che la probabilità di avere al più 5 PC difettosi tra 200 PC è circa il 98%.

DEFINIZIONE GENERALE DI VARIABILE ALEATORIA

In uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, una funzione $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \rightarrow X(\omega)$

è una variabile aleatoria se per ogni $x \in \mathbb{R}$, l'insieme

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega \text{ tali che } X(\omega) \leq x\}$$

è un evento, ossia appartiene a $\mathcal{F}$.

NOTA BENE: poiché PER IPOTESI $\{X \leq x\} \in \mathcal{F}$, ha senso calcolare $P(X \leq x)$.

DEFINIZIONE DI FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE O DI RIPARTIZIONE

$$F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0,1], \quad x \rightarrow F_X(x) := P(X \leq x)$$

ossia F_X è la funzione definita da $F_X(x) := P(X \leq x)$

OSSERVAZIONE se la funzione di distribuzione è nota

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

come segue subito osservando che

$F_X(b) - F_X(a) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$ e che $P(X \leq a) + P(a < X \leq b) = P(X \leq b)$.

Si ha che, se X è discreta, con densità discreta $p_X(x_k) = P(X=x_k)$ allora

$$F_X(x) = \sum_{k \geq 1 \text{ tali che } x(k) \leq x} p_X(x_k) = \sum_{k \geq 1 \text{ tali che } x(k) \leq x} P(X=x_k) \quad (\text{NB qui per semplicità di notazione scriviamo } x(k)=x_k)$$

mentre se X è assolutamente continua, con densità f , allora

$$F_X(x) = F_X(x) = \int_{(-\infty, x]} f(y) dy$$

CALCOLO DELLA DENSITA' DISCRETA PER LE VARIABILI ALEATORIE: TEMPI DI PRIMO SUCCESSO, DI SECONDO SUCCESSO, TERZO SUCCESSO, ETC...

DA COMPLETARE

mercoledì 1 maggio 2013 (festa)

24) venerdì 3 maggio 2013

VARIABILI ALEATORIE ASSOLUTAMENTE CONTINUE: DENSITA' DI PROBABILITA' E FUNZIONE DI RIPARTIZIONE E RELAZIONI TRA LORO

DEFINIZIONE di variabile aleatoria (assolutamente) continua

Una variabile aleatoria si dice (assolutamente) continua se esiste una funzione $f(x)=f_X(x)$

con $f(x) \geq 0$ per ogni x reale

e con

$$\int_{(-\infty, +\infty)} f(x) dx = 1$$

per la quale

$$F_X(x) = \int_{(-\infty, x]} f(y) dy$$

e quindi, equivalentemente,

qualunque siano $a < b$

$$P(a < X \leq b) = \int_{(a, b]} f(x) dx = F_X(b) - F_X(a)$$

Si osservi che per variabili aleatorie assolutamente continue, la probabilità che X appartenga ad un intervallo di estremi a e b non cambia se l'intervallo è aperto o chiuso e più precisamente

$$P(a < X \leq b) = \int_{(a,b]} f(x) dx = P(a \leq X \leq b) = \int_{[a,b]} f(x) dx = P(a < X < b) = \int_{(a,b)} f(x) dx = P(a \leq X < b) = \int_{[a,b)} f(x) dx$$

RELAZIONE TRA $F = F_X$ e f .

$f(x) = (d/dx)F(x)$, in quasi ogni punto. ATTENZIONE NON E' DERIVABILE OVUNQUE: ad esempio nei punti in cui $f(x)$ è discontinua F non è derivabile.

MA ATTENZIONE se F è derivabile in quasi ogni punto, NON E' DETTO che la sua derivata sia una densità.

OSSERVAZIONE: ANALOGIA CON IL CASO DI VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

Ricordiamo che, se X è discreta, con densità discreta $p_X(x_k) = P(X=x_k)$ allora

$$F(x) = \sum_{k \geq 1 \text{ tali che } x(k) \leq x} p_X(x_k) = \sum_{k \geq 1 \text{ tali che } x(k) \leq x} P(X=x_k) \quad (\text{NB qui per semplicità di notazione scriviamo } x(k)=x_k)$$

mentre se X è assolutamente continua, con densità di probabilità $f(x)$

$$F(x) = \int_{(-\infty, x]} f(y) dy$$

ESEMPI:

VARIABILI ALEATORIE UNIFORMI in un intervallo (a,b) E VARIABILI ALEATORIE ESPONENZIALI di parametro $\lambda > 0$.

VALORE ATTESO prima definizione

DUE DEFINIZIONI PER IL CASO DI VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

DEFINIZIONE NEL CASO SPAZIO DEGLI EVENTI FINITO,

DEFINIZIONE PER VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

DA COMPLETARE

25) lunedì 6 maggio 2013

PROPRIETA' DEL VALORE ATTESO (LINEARITA' MONOTONIA, DIM: SOLO NEL CASO della definizione per Omega finito)

CALCOLO DEI VALORI ATTESI DI DIVERSE VARIABILI ALEATORIE DISCRETE:

VARIABILE DEGENERARE, FUNZIONE INDICATRICE,

UNIFORME, BINOMIALE, IPERGEOMETRICA, POISSON, GEOMETRICA

DA COMPLETARE

26) mercoledì 8 maggio 2013

VALORE ATTESO DI FUNZIONI DI VARIABILI ALEATORIE...

COME posto $Z=g(X)$

$E[g(X)]$ si può calcolare come

1) Calcolare $P(Z=z_j)$ e poi procedere come al solito per calcolare

$$E[Z] = \sum_{j \geq 1} z_j P(Z=z_j)$$

$$2) E[g(X)] = \sum_{k \geq 1} g(x_k) p_X(x_k)$$

ESEMPI e DIMOSTRAZIONE che le due espressioni sono uguali:

ESEMPIO (a lezione ne è stato svolto un altro)

Sia X una v.a. a valori in $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $P(X=-2)=P(X=-1)=1/10$, $P(X=1)=P(X=2)=1/20$, $P(X=0)=2/10$

Sia $Z=X^2$.

Z assume i valori $\{0, 1, 4\}$

e $\{Z=0\}=\{X^2=0\}=\{X=0\}$, $\{Z=1\}=\{X^2=1\}=\{X=1\} \cup \{X=-1\}$, $\{Z=4\}=\{X^2=4\}=\{X=2\} \cup \{X=-2\}$

quindi

$$P(\{Z=0\}) = P(\{X=0\}) = 2/10, \quad P(\{Z=1\}) = P(\{X^2=1\}) = P(\{X=1\} \cup \{X=-1\}) = P(\{X=1\}) + P(\{X=-1\}) = 3/20,$$

$$P(\{Z=4\}) = P(\{X^2=4\}) = P(\{X=2\}) + P(\{X=-2\}) = 3/20$$

quindi

$$E(Z) = 0P(Z=0) + 1P(Z=1) + 4P(Z=4) = 0P(\{X=0\}) + 1(P(\{X=1\}) + P(\{X=-1\})) + 4(P(\{X=2\}) + P(\{X=-2\}))$$

$$(= 0 + 3/20 + 4 \cdot 3/20 = 15/20 = 3/4)$$

$$= 0P(\{X=0\}) + 1^2 P(\{X=1\}) + (-1)^2 P(\{X=-1\}) + 2^2 P(\{X=2\}) + (-2)^2 P(\{X=-2\})$$

$$(= 0 \cdot 2/10 + 1/20 + 1/10 + 4 \cdot 1/20 + 4 \cdot 1/10 = 15/20 = 3/4)$$

DIMOSTRAZIONE che

$$E[Z] = \sum_{j \geq 1} z_j P(Z=z_j) = E[g(X)] = \sum_{k \geq 1} g(x_k) p_X(x_k)$$

il punto essenziale è che

$$P(Z=z_j) = \sum_{h \geq 1: g(x_h)=z_j} p_X(x_h) \text{ e quindi}$$

$$E[Z] = \sum_{j \geq 1} z_j P(Z=z_j) =$$

$$= \sum_{j \geq 1} z_j \sum_{h \geq 1: g(x_h)=z_j} p_X(x_h) = \sum_{j \geq 1} \sum_{h \geq 1: g(x_h)=z_j} z_j p_X(x_h) = \sum_{j \geq 1} \sum_{h \geq 1: g(x_h)=z_j} g(x_h) p_X(x_h)$$

dove l'ultima uguaglianza dipende dal fatto che si sta sommando sui valori h per i quali $z_j = g(x_h)$.

Basta osservare che

$$\sum_{j \geq 1} \sum_{h \geq 1: g(x_h)=z_j} g(x_h) p_X(x_h)$$

corrisponde a sommare tutti i valori $g(x_k) p_X(x_k)$ in ordine diverso da quello naturale

VARIANZA definizione e proprietà

$$\text{Var}(X) := E[(X - E(X))^2]$$

Dalla definizione si vede subito che $\text{Var}(X) \geq 0$

E' inoltre facile controllare che $\text{Var}(aX+b) = a^2 \text{Var}(X)$

Osservazione

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

questa formula è spesso comoda per calcolare la varianza

$$\text{infatti: } \text{Var}(X) := E[(X - E(X))^2]$$

e $(X - E(X))^2 = X^2 - 2X E(X) + (E(X))^2$, quindi,

$$E[(X - E(X))^2] = E[X^2 - 2X E(X) + (E(X))^2] = E[X^2] - 2 E[X] E(X) + (E(X))^2 = E[X^2] - (E(X))^2$$

calcolo della varianza di una v.a.

ESEMPIO (a lezione ne è stato svolto un altro)

Sia X una v.a. a valori in $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $P(X=-2)=P(X=-1)=1/10$, $P(X=1)=P(X=2)=1/20$, $P(X=0)=2/10$

Allora

$$E(X) = (-2)P(X=-2) + (-1)P(X=-1) + 0P(X=0) + 1P(X=1) + 2P(X=2) = (-2) \cdot \frac{1}{10} + (-1) \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{2}{10} + 1 \cdot \frac{1}{20} + 2 \cdot \frac{1}{20} \\ = -\frac{3}{10} + \frac{2}{20} = -\frac{3}{20}$$

$$\text{Var}(X) := E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{20}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{9}{400} = \frac{300}{400} - \frac{9}{400} = \frac{291}{400}$$

ESERCIZI DAL FILE tutoraggio_2010

http://twiki.dsi.uniroma1.it/twiki/viewfile/CP/WebHome?rev=1;filename=tutoraggio_2010.pdf

in particolare sull'approssimazione di POISSON (esercizi 3 e 4 di 4-5 Maggio 2010)

DA COMPLETARE?

venerdì 10 maggio 2013

SOSPENSIONE DELLE LEZIONI per la Lectio Magistralis del premio Turing 2012, SILVIO MICALI (MIT)

27) lunedì 13 maggio 2013

calcolo della varianza per la funzione indicatrice di un evento

calcolo della varianza di una v.a. BINOMIALE

calcolo della varianza di una v.a. POISSON

DISUGUAGLIANZA DI CHEBYSHEV (Dim come su APPUNTI NAPPO-SPIZZICHINO)

Cenno all'utilizzo della disuguaglianza di Chebyshev per dimostrare che la frequenza è vicina alla probabilità, nel caso di esperimenti ripetuti.

DA COMPLETARE

28) mercoledì 15 maggio 2013

Dimostrazione della DISUGUAGLIANZA DI CHEBYSHEV (come su ROSS inizio capitolo 8) con la disuguaglianza di Markov:

Disuguaglianza di Markov: se Y è una v.a. con $Y \geq 0$ e a è un numero reale strettamente positivo ($a > 0$)

allora

$$P(Y > a) \leq E(Y)/a$$

e per ogni $r > 0$ $P(Y > a) \leq E(Y^r)/a^r$.

Ovviamente la disuguaglianza è interessante solo se $E(Y)$ è finito e $E(Y)/a < 1$

e $E(Y^r) < \infty$ e $E(Y^r)/a^r < 1$, rispettivamente.

DIMOSTRAZIONE:

$$P(Y > a) = E(1_{\{Y > a\}})$$

la tesi segue immediatamente dalle proprietà del valore atteso non appena si osserva che

$$1_{\{Y > a\}} \leq Y/a \quad (\text{per la verifica vedere più sotto})$$

allora, per la proprietà di monotonia del valore atteso

$$E(1_{\{Y > a\}}) \leq E(Y/a)$$

e quindi

$$P(Y > a) = E(1_{\{Y > a\}}) \leq E(Y/a) = E(Y)/a$$

(si usa la proprietà di linearità per l'ultima uguaglianza)

$$\text{VERIFICA DI } 1_{\{Y > a\}} \leq Y/a$$

si hanno solo due casi $1_{\{Y > a\}} = 0$ oppure $1_{\{Y > a\}} = 1$

se $1_{\{Y > a\}} = 0$ allora ovviamente $1_{\{Y > a\}} \leq Y/a$ in quanto $Y/a \geq 0$

se $1_{\{Y > a\}} = 1$ allora ovviamente $Y > a$ ed equivalentemente $Y/a > 1$ (essendo $a > 0$)

$$\text{e quindi } Y/a > 1 = 1_{\{Y > a\}}$$

DIMOSTRAZIONE DELLA DISUGUAGLIANZA DI CHEBYSHEV

basta prendere $Y = |X - E(X)|$ $a = \epsilon$ ed $r = 2$

Calcolo della varianza di una v.a. X Geometrica di parametro p ($E(X) = 1/p$, $E(X^2) = (2-p)/p^2$, $\text{Var}(X) = (1-p)/p^2$,

Utilizzo delle disuguaglianze di Chebyshev e Markov nel caso di una v.a. Geometrica di parametro $p = 1/4$

$$P(X > 10) = (3/4)^{10}$$

$$P(X > 10) \leq E(X)/10 = 4/10 \quad (\text{Markov per } r=1)$$

$$P(X > 10) \leq E(X^2)/100 = (7/4)/(1/4^2)/100 = 28/100$$

$$P(X > 10) \leq P(X > 10) + P(X < -2) = P(|X - 4| > 6) \leq \text{Var}(X)/6^2 = 12/36 = 1/3$$

[ATTENZIONE IN REALTA' in questo caso $P(X < -2) = 0$ e quindi $P(X > 10) = P(X > 10) + P(X < -2)$]

in generale

Varianza della somma di due v.a. VERIFICA DI

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$$

dove $\text{Cov}(X, Y)$ = covarianza di X e Y definita da

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X)) (Y - E(Y))]$$

$$\text{verifica di } E[(X - E(X)) (Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\text{Calcolo della Covarianza di } X=1_A \text{ e } Y=1_B: \text{Cov}(1_A, 1_B) = P(AB) - P(A)P(B)$$

QUINDI

$$\text{se A e B sono indipendenti } \text{Cov}(1_A, 1_B) = 0$$

$$\text{se A e B sono correlati positivamente } \text{Cov}(1_A, 1_B) > 0$$

$$\text{se A e B sono correlati negativamente } \text{Cov}(1_A, 1_B) < 0$$

FORMULA DELLA VARIANZA DI $X_1 + X_2 + \dots + X_n$

$$\text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n) + \sum_{h \neq k} \text{Cov}(X_h, X_k)$$

CALCOLO DI $\text{Var}(X)$ se X è una variabile aleatoria $\text{Bin}(n, p)$

equivale a calcolare $\text{Var}(S_n)$

dove $S_n = 1_{A_1} + 1_{A_2} + \dots + 1_{A_n}$, e dove $A_1, \dots, A_n$, sono eventi globalmente indipendenti e tutti con $P(A_i) = p$.

[infatti sappiamo che S_n è una v.a. $\text{Bin}(n, p)$ e quindi $E[g(X)] = E[g(S_n)]$, in particolare $E(X) = E(S_n)$ e $E(X^2) = E[(S_n)^2]$ e quindi $\text{Var}(X) = \text{Var}(S_n)$]

Allora

$$E(S_n) = E(1_{A_1} + 1_{A_2} + \dots + 1_{A_n}) = E(1_{A_1}) + E(1_{A_2}) + \dots + E(1_{A_n}) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = np$$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(S_n) = \text{Var}(1_{A_1}) + \text{Var}(1_{A_2}) + \dots + \text{Var}(1_{A_n}) + \sum_{h \neq k} \text{Cov}(1_{A_h}, 1_{A_k})$$

$$= n\text{Var}(1_{A_1}) + 0 = np(1-p)$$

in quanto $\text{Cov}(1_{A_h}, 1_{A_k}) = 0$ per $h \neq k$, essendo gli eventi $A_1, \dots, A_n$ globalmente indipendenti,

$$\text{e } \text{Var}(1_{A_1}) = P(A_1 A_1) - P(A_1)^2 = P(A_1) - P(A_1)^2 = P(A_1)(1 - P(A_1)) = p(1-p)$$

29) venerdì 17 maggio 2013

Dimostrazione della formula della varianza della somma (obbligatoria per $n=2$) facoltativa per n generico

FORMULA DELLA VARIANZA DI $X_1+X_2+\dots+X_n$

$$\text{Var}(X_1+X_2+\dots+X_n) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n) + \sum \sum_{h \neq k} \text{Cov}(X_h, X_k)$$

CALCOLO DELLA VARIANZA DI UNA DISTRIBUZIONE IPERGEOMETRICA

se $P(X=k) = \frac{C^b_k C^r_{n-k}}{C^{b+r}_n}$ per $0 \leq k \leq b$ $0 \leq n-k \leq r$

allora X ha la stessa distribuzione di Z_n dove Z_n è la variabile aleatoria che conta il numero di palline bianche estratte da un'urna che contiene b palline bianche ed r rosse

e inoltre

$Z_n = 1_{B_1} + 1_{B_2} + \dots + 1_{B_n}$, e dove B_i è l'evento "l' i -esima pallina estratta è bianca"

allora

$$E(X) = E(Z_n) = E(1_{B_1} + 1_{B_2} + \dots + 1_{B_n}) = E(1_{B_1}) + E(1_{B_2}) + \dots + E(1_{B_n}) = P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n) = n \frac{b}{b+r}$$

inoltre

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(Z_n) = \text{Var}(1_{B_1}) + \text{Var}(1_{B_2}) + \dots + \text{Var}(1_{B_n}) + \sum \sum_{h \neq k} \text{Cov}(1_{B_h}, 1_{B_k})$$

$$= n \text{Var}(1_{B_1}) + n(n-1) \text{Cov}(1_{B_1}, 1_{B_2}) = n P(B_1) (1 - P(B_1)) + n(n-1) [P(B_1 B_2) - P(B_1) P(B_2)]$$

ora

$$P(B_1 B_2) - P(B_1) P(B_2) = P(B_1) P(B_2 | B_1) - P(B_1) P(B_2) = P(B_1) [P(B_2 | B_1) - P(B_2)] = P(B_1) \left[\frac{b-1}{b+r-1} - \frac{b}{b+r} \right]$$

$$= P(B_1) \left[\frac{(b-1)(b+r) - b(b+r-1)}{(b+r-1)(b+r)} \right] = P(B_1) \frac{(-r)}{(b+r-1)(b+r)} = -P(B_1) \frac{(1 - P(B_1))}{(b+r-1)}$$

(dove l'ultima uguaglianza deriva dall'osservare che $1 - P(B_1) = r/(b+r)$)

e quindi,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) = \text{Var}(Z_n) &= n P(B_1) (1 - P(B_1)) + n(n-1) [P(B_1 B_2) - P(B_1) P(B_2)] = n P(B_1) (1 - P(B_1)) - n(n-1) P(B_1) \frac{(1 - P(B_1))}{(b+r-1)} \\ &= n P(B_1) (1 - P(B_1)) \left[1 - \frac{(n-1)}{(b+r-1)} \right] = n \left(\frac{b}{b+r} \right) \left(1 - \frac{b}{b+r} \right) \left[1 - \frac{(n-1)}{(b+r-1)} \right] \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 1

Prendere $n=b+r$ corrisponde a estrarre tutte le palline dall'urna e allora $Z_{\{b+r\}}=b$ è una variabile aleatoria degenera (ossia assume un solo valore) e quindi la sua varianza vale 0, come del resto appare dalla formula

[infatti $1-(n-1)/(b+r-1)=1-1=0$ quando $n=b+r$]

OSSERVAZIONE2

RICHIAMO: le probabilità binomiali si possono usare come approssimazione delle probabilità ipergeometriche, quando n è fissato, b ed r tendono ad infinito, ma $b/(b+r)=p$ (o tende a p). Ciò si riflette nel fatto che per n fissato e $b+r$ grande $\text{Var}(Z_n)=np(1-p) [1-(n-1)/(b+r-1)]$ è ben approssimata da $np(1-p)$ che corrisponde alla varianza di una v.a. binomiale con lo stesso n e probabilità p .

DENSITA' DISCRETA CONGIUNTA DI DUE VARIABILI ALEATORIE X e Y , TABELLA della densità discreta congiunta, DENSITA' MARGINALE di X e DENSITA' MARGINALE di Y , CALCOLO DEL VALORE ATTESO DI UNA FUNZIONE $g(X,Y)$

ESEMPIO DI CALCOLO DELLA DENSITA' DISCRETA DI UNA VARIABILE ALEATORIA $Z=g(X,Y)=X+Y$

ESERCIZIO SVOLTO:

Siano X e Y due variabili aleatorie con $X(\Omega)=-1,0,1$ e $Y(\Omega)=\{1,2,3,4\}$

Si assuma $P(X=-1,Y=1)=P(X=1,Y=3)=P(X=0,Y=2)=P(X=0,Y=4)=1/10$, $P(X=1,Y=1)=P(X=1,Y=4)=c$ e $P(X=i,Y=j)=0$ in tutti gli altri casi

- 1) trovare il valore di c
- 2) trovare le densità marginali di X e Y
- 3) calcolare $E(X)$ ed $E(Y)$
- 4) calcolare $\text{Cov}(X,Y)$
- 5) calcolare $\text{Var}(X+Y)$
- 6) calcolare la densità discreta di $Z=X+Y$

30) lunedì 20 maggio 2013

31) mercoledì 22 maggio 2013

32) venerdì 24 maggio 2013

33) lunedì 27 maggio 2013

34) mercoledì 29 maggio 2013

35) venerdì 31 maggio 2013

ESAMI DATE DA STABILIRE:

Seconda sessione dal 03/06/2013 al 12/07/2013 (due appelli)

martedì 4 giugno ore 14,30 AULA 1 NEC

mercoledì 26 giugno ore 14,30 AULA 1 NEC

(prevedo un terzo appello per luglio, data ora e aula, da stabilire)

Terza sessione dal 09/09/2013 al 20/09/2013

ulteriore sessione gennaio - febbraio 2014 (due appelli)

sessioni straordinarie (aprile e novembre)