Laurea triennale in INFORMATICA, Corso di **CALCOLO DELLE PROBABILITÀ**
COMPITO SCRITTO del 9 luglio 2014 - Prof.Nappo - FOGLIO RISPOSTE

NOME e COGNOME______________________________ **VOTO:** __________

N.B. Mettere una croce sui punti risolti degli esercizi. ATTENZIONE ALLE DOMANDE CON L'ASTERISCO $*$

Esercizio 1.

i) ☐ $*$ **(a)** __________ ☐ $*$ **(b)** __________

ii) ☐ $*$ **(a)** __________ ☐ **(b)** __________

iii) ☐ $*$ **(a)** __________ ☐ **(b)** __________

iv) ☐ **(a)** __________ ☐ **(b)** __________

v) (FACOLTATIVO) ☐ **(a)** __________ ☐ **(b)** __________

Esercizio 2.

i) ☐ $*$ __________

ii) ☐ $*$ __________

iii) ☐ **(a)** __________ ☐ **(b)** __________

iv) ☐ __________

v) ☐ __________

vi) ☐ (FACOLTATIVO) __________

Esercizio 3.

i) ☐ $*$ __________

ii) ☐ $*$ __________

iii) ☐ **(a)** __________ ☐ **(b)** __________

iv) ☐ **(a)** __________ ☐ **(b)** __________

v) ☐ **(a)** __________ OPPURE ☐ **(b)** __________

Laurea triennale in INFORMATICA, Corso di **CALCOLO DELLE PROBABILITÀ**

Prof. G. Nappo – COMPITO SCRITTO DEL 9 LUGLIO 2014

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) ____

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli **giustificando** brevemente i passaggi svolti.
ATTENZIONE: Svolgere tutti i calcoli fino in fondo, SOLO se avete tempo.

Esercizio 1. In un esame vengono preparate 12 domande: 5 di Storia 4 di Geometria e 3 di Algebra. Dopo averle messe in un'urna si scelgono delle domande a caso estrendole una dopo l'altra dall'urna. Siano A_i =la i-sima domanda estratta è di Algebra e analogamente $G_i =$ ed $S_i =$ per le domande di Geometria e di Storia

i) $*$ **(a)** Calcolare la probabilità che almeno una tra le prime due domande estratte sia di Algebra.
$*$ **(b)** Calcolare la probabilità che le prime quattro domande estratte siano **nell'ordine** una di Geometria, una di Storia, una di Algebra e una di Storia.

Nel caso si **estraggano 4 domande** si ponga X_A il numero di domande di Algebra estratte, e analogamente si pongano X_G per il numero di domande di Geometria estratte e X_S per il numero di domande di Storia estratte.
Calcolare:

ii) $*$ **(a)** $\mathbb{P}(X_A = k)$ **specificando per quali valori di k risulta strettamente positiva**, e di che tipo di distribuzione si tratta **(b)** $\mathbb{E}(X_A)$;

iii) $*$ **(a)** la probabilità che esca almeno una domanda di Algebra;
(b) la probabilità di estrarre due domande di Geometria e due di Algebra;

iv) **(a)** $\mathbb{P}(X_G = 1, X_A = 2)$ e $\mathbb{P}(X_G = k|X_A = 2)$ **specificando per quali valori di k risulta strettamente positiva**;
(b) $\mathbb{E}(X_G|X_A = 2)$ (**suggerimento:** per evitare i calcoli, si consiglia di individuare il tipo di distribuzione di X_G condizionata a $X_A = 2$).

v) (FACOLTATIVO) Si supponga di ripetere l'estrazione nelle stesse condizioni fino a quando per la prima volta esce almeno una domanda di Algebra:
(a) Posto T_A il numero di estrazioni necessarie, calcolare il valore atteso di T_A
(b) Calcolare la probabilità che **servano al massimo 3 estrazioni** (per ottenere almeno una domanda di Algebra).

COMPITO SCRITTO DI **CALCOLO DELLE PROBABILITÀ** del 9 luglio 2014, Prof. G. Nappo

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) ____________________

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi esclusivamente su questi fogli giustificando brevemente i passaggi svolti.
ATTENZIONE: per risolvere il punto *iii) (b)* è necessario svolgere tutti i calcoli fino in fondo.

Esercizio 2. Ci sono 3 urne (esternamente uguali) e ciascuna contiene 4 palline e precisamente
- la 1^a urna contiene 1 pallina bianca e 3 palline rosse
- la 2^a urna contiene 2 palline bianche e 2 palline rosse
- la 3^a urna contiene solo palline bianche

L'urna viene scelta secondo il seguente meccanismo: si lancia 2 volte **una moneta truccata** con probabilità che esca testa uguale a 1/3 e, se esce il numero di teste è 1 si sceglie l'urna 1, il numero di teste è 2 si sceglie l'urna 2, altrimenti si sceglie la terza urna.

Successivamente vengono effettuate **3 estrazioni CON REINSERIMENTO dall'urna scelta (sempre la stessa)**. Siano $H_i = \{\text{viene scelta l'urna } i\}$, per $i = 1, 2, 3$, $B_k = \{\text{la } k\text{-sima pallina estratta è bianca}\}$, $R_k = \{\text{la } k\text{-sima pallina estratta è rossa}\}$, per $k \geq 1$.

i) $*$ Calcolare $P(H_1)$, $P(H_2)$ e $P(H_3)$, e calcolare la probabilità che la prima pallina estratta sia rossa.

ii) $*$ **Sapendo che prima pallina estratta è rossa**, calcolare la probabilità che sia stata scelta la 2^a urna.

iii) ***(a)*** Calcolare la probabilità **(non condizionata)** che la prima pallina estratta e la seconda pallina estratta siano entrambe rosse.
(b) Gli eventi R_1 e R_2 sono indipendenti?

iv) **Sapendo che** le prime due palline estratte sono entrambe rosse, calcolare la probabilità che l'urna scelta sia la prima, la probabilità che l'urna scelta sia la seconda e la probabilità che l'urna scelta sia la terza.

v) Posto X_R il numero di palline rosse estratte, calcolare il valore atteso (non condizionato) di X_R (si suggerisce di utilizzare $E[X_R|H_1]$ ed $E[X_R|H_2]$).

vi) (FACOLTATIVO) Trovare i valori approssimati di $P(X_R = 2|H_1)$, $P(X_R = 2|H_2)$, $P(X_R = 2)$ e di $E[X_R]$, nel caso in cui si effettuino 200 estrazioni, e in cui la composizione delle urne sia la seguente (si noti che ciascuna urna contiene 100 palline)
- la 1^a urna contiene 97 pallina bianca e 3 palline rosse
- la 2^a urna contiene 98 palline bianche e 2 palline rosse
- la 3^a urna contiene solo palline bianche

(la modalità di scelta delle urne è la stessa di prima)

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - Prof. G. Nappo COMPITO SCRITTO DEL 9 LUGLIO 2014

NOME e COGNOME____

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli **giustificando** brevemente i passaggi svolti.
ATTENZIONE: È necessario svolgere tutti i calcoli fino in fondo

Esercizio 3. Siano U e V variabili aletorie, con U a valori in $\{-2, 0, 2\}$ e V a valori in $\{-2, 0, 1, 2\}$. Si assuma $P(U = -2, V = -2) = P(U = 2, V = -2) = P(U = -2, V = 2) = P(U = 2, V = 2) = 0$ e $P(U = -2, V = 1) = P(U = 2, V = 1) = 2c$, e infine $P(U = i, V = j) = c$ per i rimanenti valori di (i, j).

i) $*$ Spiegare il motivo per cui $c = 1/10$.

ii) $*$ Calcolare la densità discreta di U e mostrare che il suo valore atteso vale 0 e la sua varianza vale $12/5$.

iii) **(a)** Calcolare $Cov(U, V)$. **(b)** Le variabili aleatorie U e V sono indipendenti?

iv) Calcolare **(a)** la probabilità che $U + 2V = 0$ e **(b)** la probabilità che $V = 0$ **dato che** $U + 2V = 0$.

v) Se $\{X_i,\ i = 1, 2, ..., 240\}$ sono variabili aleatorie (globalmente) indipendenti e tutte con la stessa legge di U, e $Y = \frac{1}{240} \sum_{i=1}^{240} X_i = \frac{1}{240} S_{240}$, dopo aver calcolato valore atteso e varianza di Y, trovare:
(a) una minorazione per $P\big(|Y| \leq 2/10\big)$ utilizzando la disuguaglianza di Chebyshev
OPPURE
(b) una approssimazione per $P\big(|Y| \leq 2/10\big)$ utilizzando le tavole della Gaussiana.