Laurea triennale in INFORMATICA, Corso di **CALCOLO DELLE PROBABILITÀ**
COMPITO SCRITTO del 18 giugno 2014 - Prof.Nappo - FOGLIO RISPOSTE

NOME e COGNOME____ **VOTO:** ____________

N.B. Mettere una croce sui punti risolti degli esercizi. ATTENZIONE ALLE DOMANDE CON L'ASTERISCO $*$

Esercizio 1.

i) □ $*$ **(a)** ________________ □ $*$ **(b)** ________________

ii) □ $*$ **(a)** ________________ □ **(b)** ________________

iii) □ $*$ ________________

iv) □ ________________

v) □ **(a)** ________________ □ **(b)** ________________

Esercizio 2.

i) □ $*$ ________________

ii) □ $*$ ________________

iii) □ **(a)** ________________ □ **(b)** ________________

iv) □ ________________

v) □ ________________

vi) □ (FACOLTATIVO) ________________

Esercizio 3.

i) □ $*$ ________________

ii) □ $*$ ________________

iii) □ **(a)** ________________ □ **(b)** ________________

iv) □ **(a)** ________________ □ **(b)** ________________

v) □ **(a)** ________________ OPPURE □ **(b)** ________________

Laurea triennale in INFORMATICA, Corso di **CALCOLO DELLE PROBABILITÀ**

Prof. G. Nappo – COMPITO SCRITTO DEL 18 giugno 2014

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) ______________________________

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli **giustificando** brevemente i passaggi svolti.
ATTENZIONE: Svolgere tutti i calcoli fino in fondo, SOLO se avete tempo.

Esercizio 1. In un esame vengono preparate 12 domande: 5 di Storia e 7 di Matematica, di cui 3 di Geometria e 4 di Algebra. Si estraggono 4 domande a caso una dopo l'altra dall'urna.

i) $*$ **(a)** Mostrare che la probabilità che le domande estratte siano **nell'ordine** una di Storia, una di Geometria, una di Storia e una di Algebra vale 2/99.
$*$ **(b)** Mostrare che la probabilità che le domande estratte siano due di Storia e due di Matematica (**senza tenere conto dell'ordine**) vale 14/33.

Si ponga X_S il numero di domande di Storia estratte, e analogamente si pongano X_G per il numero di domande di Geometria estratte e X_A per il numero di domande di Algebra estratte. **Calcolare (qui non è necessario svolgere i conti fino in fondo):**

ii) $*$ **(a)** $\mathbb{P}(X_S = k)$ specificando per quali valori di k risulta strettamente positiva, e di che tipo di distribuzione si tratta **(b)** $\mathbb{E}(X_S)$;

iii) $*$ la probabilità che escano almeno due domande di Storia;

iv) la probabilità di estrarre due domande di storia e due di Algebra;

v) **(a)** $\mathbb{P}(X_S = 2, X_A = 1)$ e $\mathbb{P}(X_A = k | X_S = 2)$ specificando per quali valori di k risulta strettamente positiva;
(b) $\mathbb{E}(X_A | X_S = 1)$ (**suggerimento:** per evitare i calcoli, si consiglia di individuare il tipo di distribuzione di X_A condizionata a $X_S = 2$).

COMPITO SCRITTO DI **CALCOLO DELLE PROBABILITÀ** del 18 giugno 2014, Prof. G. Nappo

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) ______________________________

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi esclusivamente su questi fogli giustificando brevemente i passaggi svolti.
ATTENZIONE: per risolvere il punto *iii) (b)* è necessario svolgere tutti i calcoli fino in fondo.

Esercizio 2. Ci sono 2 urne (esternamente uguali) e ciascuna contiene 4 palline e precisamente
- la 1^a urna contiene 1 pallina bianca e 3 palline rosse
- la 2^a urna contiene 2 palline bianche e 2 palline rosse

L'urna viene scelta secondo il seguente meccanismo: si lancia 3 volte **una moneta truccata** con probabilità che esca testa uguale a 2/3 e, se esce sempre la stessa faccia si sceglie l'urna 1, altrimenti si sceglie la seconda urna. Successivamente vengono effettuate **3 estrazioni CON REINSERIMENTO dall'urna scelta (sempre la stessa)**. Siano $H_i = \{\text{viene scelta l'urna } i\}$, per $i = 1, 2$, $B_k = \{\text{la } k\text{-sima pallina estratta è bianca}\}$, $R_k = \{\text{la } k\text{-sima pallina estratta è rossa}\}$, per $k \geq 1$.

i) $*$ Mostrare che $P(H_1) = 1/3$, e calcolare la probabilità che la prima pallina estratta sia rossa.

ii) $*$ **Sapendo che prima pallina estratta è rossa**, calcolare la probabilità che sia stata scelta la 2^a urna.

iii) ***(a)*** Calcolare la probabilità **(non condizionata)** che la prima pallina estratta e la seconda pallina estratta siano entrambe rosse.
(b) Gli eventi R_1 e R_2 sono indipendenti?

iv) **Sapendo che** le prime due palline estratte sono entrambe rosse, calcolare la probabilità che l'urna scelta sia la prima e la probabilità che l'urna scelta sia la seconda.

v) Posto X_R il numero di palline rosse estratte, calcolare il valore atteso (non condizionato) di X_R (si suggerisce di utilizzare $E[X_R|H_1]$ ed $E[X_R|H_2]$).

vi) (FACOLTATIVO) Trovare i valori approssimati di $P(X_R = 1|H_1)$, $P(X_R = 1|H_2)$, $P(X_R = 1)$ e di $E[X_R]$, nel caso in cui si effettuino 100 estrazioni, e in cui la composizione delle urne sia la seguente (si noti che ciascuna urna contiene 100 palline)
- la 1^a urna contiene 97 pallina bianca e 3 palline rosse
- la 2^a urna contiene 98 palline bianche e 2 palline rosse

(la modalità di scelta delle urne è la stessa di prima)

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - Prof. G. Nappo COMPITO SCRITTO DEL 18 GIUGNO 2014

NOME e COGNOME____

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli **giustificando** brevemente i passaggi svolti.
ATTENZIONE: È necessario svolgere tutti i calcoli fino in fondo

Esercizio 3. Siano U e V variabili aletorie, entrambe a valori in $\{-2, 0, 2\}$. Si assuma $P(U = -2, V = 2) = P(U = 2, V = -2) = P(U = -2, V = -2) = 0$ e $P(U = i, V = i) = 2c$, per $i = 0, 2$, e $P(U = i, V = j) = c$ per i rimanenti valori di (i, j).

i) $*$ Spiegare il motivo per cui $c = 1/8$.

ii) $*$ Calcolare la densità discreta di U e mostrare che il suo valore atteso vale $1/2$ e la sua varianza vale $7/4$.

iii) **(a)** Calcolare $Cov(U, V)$. **(b)** Le variabili aleatorie U e V sono indipendenti?

iv) Calcolare **(a)** la probabilità che UV sia uguale a 0 e **(b)** la probabilità che $V = 2$ **dato che** $UV = 0$.

v) Se $\{X_i,\ i = 1, 2, ..., 700\}$ sono variabili aleatorie (globalmente) indipendenti e tutte con la stessa legge di U, e $Y = \frac{1}{700} \sum_{i=1}^{700} X_i = \frac{1}{700} S_{700}$, dopo aver calcolato valore atteso e varianza di Y, trovare:
(a) una minorazione per $P\big(|Y - 1/2| \leq 1/10\big)$ utilizzando la disuguaglianza di Chebyshev
OPPURE
(b) una approssimazione per $P\big(|Y - 1/2| \leq 1/10\big)$ utilizzando il Teorema Centrale del Limite