Laurea triennale in INFORMATICA, Corso di **CALCOLO DELLE PROBABILITÀ**
COMPITO - 2 luglio 2012 - FOGLIO RISPOSTE

NOME e COGNOME____________*SOLUZIONI*____________

CANALE: G. Nappo VOTO: __________

N.B. Scrivere le risposte dei vari punti degli esercizi
oppure, in mancanza di tempo e/o di spazio, mettere una croce sui punti risolti degli esercizi. ATTENZIONE ALLE DOMANDE CON L'ASTERISCO $*$

Esercizio 1.

i) ☐ $*$ __________

ii) ☐ $*$ __________

iii) ☐ $*$ __________

iv) ☐ __________

v) ☐ __________

vi) ☐ __________

Esercizio 2.

i) ☐ $*$ __________

ii) ☐ $*$ __________

iii) ☐ __________

iv) ☐ __________

v) ☐ __________

Esercizio 3.

i) ☐ $*$ __________

ii) ☐ $*$ __________

iii) ☐ (a) __________ (b) __________

iv) ☐ (a) __________ (b) __________

v) ☐ __________

Laurea triennale in INFORMATICA, Corso di **CALCOLO DELLE PROBABILITÀ**

Prof. G. Nappo – COMPITO - 2 luglio 2012

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) ______________________________

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli **giustificando** brevemente i passaggi svolti.
ATTENZIONE: È necessario svolgere tutti i calcoli fino in fondo.

Esercizio 1. Si lanciano 3 monete ben equilibrate e siano

$$A = \{\textit{la prima e la seconda moneta mostrano la stessa faccia (ossia entrambe testa o entrambe croce)}\}$$
$$B = \{\textit{la prima e la terza moneta mostrano la stessa faccia (ossia entrambe testa o entrambe croce)}\}$$
$$C = \{\textit{la seconda e la terza moneta mostrano la stessa faccia (ossia entrambe testa o entrambe croce)}\}$$

i) * Calcolare $\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B)$, e dimostrare che gli eventi A ed B sono indipendenti (in senso probabilistico).

ii) * Calcolare $P(A \cap B \cap C)$.

iii) * Gli eventi A, B, C formano una famiglia di tre eventi globalmente indipendenti?
(ovvero completamente indipendenti? ovvero mutuamente indipendenti?)

iv) Determinare la probabilità dell'evento $E = \{\textit{si verifica almeno uno tra gli eventi } A \textit{ e } B\}$.

v) **Sapendo** che si è verificato almeno uno tra gli eventi A e B, calcolare la probabilità dell'evento

$$F = \{\textit{la prima moneta è testa}\}.$$

vi) Gli eventi E ed F sono indipendenti?

Soluzioni

i) * Calcolare $\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B)$, e dimostrare che gli eventi A ed B sono indipendenti (in senso probabilistico).

RISPOSTA: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$

Infatti, posto $\Omega = \{TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC\}$,
e utilizzando la probabilità "classica" $\mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$, si ha

$$A = \{TTT, TTC, CCT, CCC\}$$
$$B = \{TTT, TCT, CTC, CCC\}$$
$$C = \{TTT, TCC, CTT, CCC\}$$

e di conseguenza

$$A \cap B = \{TTT, CCC\}$$

(del resto

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{\textit{la prima e la seconda moneta mostrano la stessa faccia }\} \cap \{\textit{la prima e la terza moneta mostrano la stessa faccia }\} \\ &= \{\textit{la prima, la seconda e la terza moneta mostrano la stessa faccia (ossia tutte e tre testa o tutte e tre croce)}\} \end{aligned}$$

da cui

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

da cui

$$\frac{1}{4} = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}$$

ossia A e B sono indipendenti.

ALTERNATIVAMENTE: posto $D_i = \{\text{esce testa nella moneta } i\text{-sima}\}$, si ha che gli eventi D_1, D_2, e D_3, formano una famiglia di tre eventi globablmente indipendenti, ciascuno di probabilità $1/2$, e

$$A = (D_1 \cap D_2) \cup (D_1^c \cap D_2^c), \quad B = (D_1 \cap D_3) \cup (D_1^c \cap D_3^c), \quad C = (D_2 \cap D_3) \cup (D_2^c \cap D_3^c),$$

da cui

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(D_1 \cap D_2) + \mathbb{P}(D_1^c \cap D_2^c) = \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}(D_2) + \mathbb{P}(D_1^c)\mathbb{P}(D_2^c) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Con passaggi del tutto analoghi si ottiene
$P(B) = \frac{1}{2}$ (basta cambiare D_2 con D_3) e $P(C) = \frac{1}{2}$ (basta cambiare D_1 con D_3).

Inoltre

$$A \cap B = \big[(D_1 \cap D_2) \cup (D_1^c \cap D_2^c)\big] \cap \big[(D_1 \cap D_3) \cup (D_1^c \cap D_3^c)\big]$$

usando la proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione

$$= \big[(D_1 \cap D_2) \cap (D_1 \cap D_3)\big] \cup \big[(D_1 \cap D_2) \cap (D_1^c \cap D_3^c)\big] \cup \big[(D_1^c \cap D_2^c) \cap (D_1 \cap D_3)\big] \cup \big[(D_1^c \cap D_2^c) \cap (D_1^c \cap D_3^c)\big]$$

osservando che $(D_1 \cap D_2) \cap (D_1^c \cap D_3^c) \subseteq D_1 \cap D_1^c = \emptyset$ e che $(D_1^c \cap D_2^c) \cap (D_1 \cap D_3) \subseteq D_1 \cap D_1^c = \emptyset$,

$$= (D_1 \cap D_2 \cap D_3) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup (D_1^c \cap D_2^c \cap D_3^c)$$

da cui

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(D_1 \cap D_2 \cap D_3) + \mathbb{P}(D_1^c \cap D_2^c \cap D_3^c) = \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}(D_2)\mathbb{P}(D_3) + \mathbb{P}(D_1^c)\mathbb{P}(D_2^c)\mathbb{P}(D_3^c) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

ii) * Calcolare $P(A \cap B \cap C)$.

RISPOSTA: $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$.

Infatti basta osservare che

$$A \cap B \cap C = \{TTT, CCC\} = A \cap B$$

e quindi

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} \text{ (per il punto } (i))$$

Il fatto che $A \cap B \cap C = A \cap B$ dipende dal fatto che il verificarsi contemporaneo di *"la prima e la seconda moneta mostrano la stessa faccia"*, *"la prima e la terza moneta mostrano la stessa faccia"*, e *"la prima e la terza moneta mostrano la stessa faccia,"* equivale a *"la prima, la seconda e la terza moneta mostrano tutte e tre la stessa faccia,"*.
ALTERNATIVAMENTE:

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = \big[(D_1 \cap D_2 \cap D_3) \cup (D_1^c \cap D_2^c \cap D_3^c)\big] \cap \big[(D_2 \cap D_3) \cup (D_2^c \cap D_3^c)\big]$$

e quindi,usando la prorpietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione,

$$\begin{aligned} A \cap B \cap C = &\big[(D_1 \cap D_2 \cap D_3) \cap (D_2 \cap D_3)\big] \cup \big[(D_1 \cap D_2 \cap D_3) \cap (D_2^c \cap D_3^c)\big] \cup \\ &\cup \big[(D_1^c \cap D_2^c \cap D_3^c) \cap (D_2 \cap D_3)\big] \cup \big[(D_1^c \cap D_2^c \cap D_3^c) \cap (D_2^c \cap D_3^c)\big] \\ = &(D_1 \cap D_2 \cap D_3) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup (D_1^c \cap D_2^c \cap D_3^c) = A \cap B \end{aligned}$$

iii) * Gli eventi A, B, C formano una famiglia di tre eventi globalmente indipendenti?
(cioè completamente indipendenti? ovvero mutuamente indipendenti?)
RISPOSTA: gli eventi A, B e C non sono globalemente indipendenti.
Infatti, per essere globalmente indipendenti gli eventi A, B e C devono soddisfare le seguenti condizioni:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad P(A \cap C) = P(A)P(C), \quad P(B \cap C) = P(B)P(C), \quad P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C),$$

o equivalentemente

$$P(\widetilde{A} \cap \widetilde{B} \cap \widetilde{C}) = P(\widetilde{A})P(\widetilde{B})P(\widetilde{C}), \qquad \text{dove}$$

$$\widetilde{A} = A \text{ oppure } \widetilde{A} = A^c \quad \text{e, similmente,} \quad \widetilde{B} = B \text{ oppure } \widetilde{B} = B^c, \qquad \widetilde{C} = C \text{ oppure } \widetilde{C} = C^c$$

(devono quindi essere verificate $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ condizioni)

Qualunque delle due definzioni si prenda in considerazione, nel caso di questo esercizio, non e' soddisfatta la condizione $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ in quanto

$$\frac{1}{4} = P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

iv) Determinare la probabilità dell'evento $E = \{\textit{si verifica almeno uno tra gli eventi } A \textit{ e } B\}$.
RISPOSTA: $P(E) = \frac{3}{4}$.
Infatti

$$E = A \cap B$$

e per il principio di inclusione ed esclusione

$$P(E) = P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \overset{\text{(essendo } A \text{ e } B \text{ indipendenti)}}{=} P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

ALTERNATIVAMENTE

$$P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - P\big((A \cup B)^c\big) = 1 - P(A^c \cap B^c) \overset{\text{(essendo } A \text{ e } B \text{ indipendenti)}}{=} 1 - P(A^c)P(B^c) = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

v) **Sapendo** che si è verificato almeno uno tra gli eventi A e B, calcolare la probabilità dell'evento

$$F = \{\textit{la prima moneta è testa}\}.$$

RISPOSTA: $P(F|E) = \frac{1}{2}$
Infatti, tenendo conto che

$$E = A \cup B = \{TTT, TTC, TCT, CTC, CCT, CCC\}$$

e quindi che

$$F \cap E = F \cap (A \cup B) = \{TTT, TTC, TCT, TCC\} \cap \{TTT, TTC, TCT, CTC, CCT, CCC\} = \{TTT, TTC, TCT\}$$

si ha

$$P(F|A) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

ALTERNATIVAMENTE:

$$P(F|A) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{P\big(F \cap (A \cup B)\big)}{P(E)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

in quanto

$$P\big(F \cap (A \cup B)\big) = P\big((F \cap A) \cup (F \cap B)\big) = P(F \cap A) + P(F \cap B) - P\big((F \cap A) \cap (F \cap B)\big) = P(F \cap A) + P(F \cap B) - P(F \cap A \cap B)$$

e, tenendo conto che $F = D_1$, si ha

$$F \cap A = D_1 \cap D_2 \quad F \cap B = D_1 \cap D_3 \quad F \cap A \cap B = D_1 \cap D_2 \cap D_3$$

e quindi

$$P\big(F \cap (A \cup B)\big) = P(F \cap A) + P(F \cap B) - P(F \cap A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

vi) Gli eventi E ed F sono indipendenti?
RISPOSTA: Gli eventi A ed F sono indipendenti,
infatti $P(F|A) = \frac{1}{2} = P(F)$, che equivale a $P(F \cap A) = P(F)\,(A)$.

Laurea triennale in INFORMATICA, Corso di **CALCOLO DELLE PROBABILITÀ**

Prof. G. Nappo – COMPITO - 2 LUGLIO 2012

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) ______________________________

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli **giustificando** brevemente i passaggi svolti.
ATTENZIONE: È necessario svolgere tutti i calcoli fino in fondo.

Esercizio 2. Un autobus effettua un tragitto con 3 fermate. Un passeggero, Mario, sale al capolinea e, decide di scendere dall'autobus in modo aleatorio, seguendo il seguente procedimento:

Inizialmente lancia una moneta equilibrata e, **se esce testa**, ad ogni fermata lancia un dado equilibrato e scende se esce un numero pari altrimenti prosegue, mentre, **se esce croce**, ad ogni fermata lancia un dado e scende se esce un numero minore o uguale a due e altrimenti prosegue. Sia X il numero d'ordine della fermata alla quale scende Mario (notare che Mario parte da un capolinea e che comunque deve scendere all'altro capolinea, cioè alla terza fermata).

i) * Calcolare la densità discreta di X (ossia $P(X = k)$, per i valori k che può assumere X).

ii) * **Sapendo che Mario è sceso alla prima fermata**, calcolare la probabilità che sia uscita testa.

Giuseppe è un altro passeggero e decide invece di seguire la seguente strategia: ad ogni fermata lancia un dado e, se esce un numero minore o uguale a 3 scende, altrimenti prosegue. Sia Y il numero d'ordine della fermata alla quale scende Giuseppe.

iii) Calcolare la densità discreta di Y (ossia $P(Y = h)$, per i valori h che può assumere Y).

iv) Calcolare il valore atteso di Y (ossia $E(Y)$).

v) Calcolare la probabilità dell'evento $A = \{$*Mario e Giuseppe scendono alla stessa fermata*$\}$

Soluzioni

i) * Calcolare la densità discreta di X (ossia $P(X = k)$, per i valori k che può assumere X).

RISPOSTA:

$$P(X=1) = \frac{5}{12}, \quad P(X=2) = \frac{17}{72} \quad \text{e} \quad P(X=3) = 1 - P(X=1) - P(X=3) == \frac{25}{72}$$

Infatti, posto $A_T = \{\text{esce testa}\}$ e $A_C = (A_T)^c = \{\text{esce croce}\}$, per la formula delle probabilità totali si ha

$$P(X=1) = P(A_T)P(X=1|A_T) + P(A_C)P(X=1|A_C) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}$$

in quanto $P(A_T) = P(A_C) = \frac{1}{2}$ e, posto B_i esce un numero pari nell'i-simo lancio del dado ed E_1 esce un numero minore o uguale a due nell'i-simo lancio del dado, allora

$$P(X=1|A_T) = P(B_1|A_T) = P(B_1) = \frac{1}{2}, \qquad \text{mentre} \qquad P(X=1|A_C) = P(E_1|A_C) = P(E_1) = \frac{1}{3},$$

Inoltre

$$P(X=2) = P(A_T)P(X=2|A_T) + P(A_C)P(X=2|A_C) = \frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{2}{9} = \frac{9+8}{8 \cdot 9} = \frac{17}{72}$$

in quanto se esce testa, allora Mario scende alla seconda fermata solo se al primo lancio del dado esce un numero dispari e al secondo lancio un numero pari

$$P(X=2|A_T) = P(B_1^c \cap B_2|A_T) = P(B_1^c \cap B_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

mentre, se esce croce, allora Mario scende alla seconda fermata solo se al primo lancio del dado esce un numero maggiore di due e al secondo lancio esce un numero minore o uguale a due

$$P(X=2|A_C) = P(E_1^c \cap E_2|A_C) = P(E_1^c \cap E_2) = \frac{2}{3}\frac{1}{3} = \frac{2}{9},$$

Per calcolare $P(X=3)$ basta osservare che poiché X può assumere solo i valori 1, 2 e 3 basta calcolarla con

$$P(X=3) = 1 - P(X=1) - P(X=3) = 1 - \frac{5}{12} - \frac{17}{72} = \frac{72-30-17}{72} = \frac{25}{72}$$

Tuttavia **SOLO per controllo** osserviamo che

$$P(X=3) = P(A_T)P(X=3|A_T) + P(A_C)P(X=3|A_C) = \frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{4}{9} = \frac{9+16}{8\cdot 9} = \frac{25}{72}$$

in quanto se esce testa, allora Mario scende alla terza ed ultima fermata solo se al primo lancio del dado esce un numero dispari e anche al secondo lancio un numero dipari

$$P(X=3|A_T) = P(B_1^c \cap B_2^c|A_T) = P(B_1^c \cap B_2^c) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

mentre, se esce croce, allora Mario scende alla terza fermata solo se al primo lancio del dado esce un numero maggiore di due e anche al secondo lancio esce un numero maggiore di due

$$P(X=2|A_C) = P(E_1^c \cap E_2^c|A_C) = P(E_1^c \cap E_2^c) = \frac{2}{3}\frac{2}{3} = \frac{4}{9},$$

ii) * **Sapendo che Mario è sceso alla prima fermata**, calcolare la probabilità che sia uscita testa.

RISPOSTA: $P(A_T|X=1) = \frac{3}{5}$

Infatti

$$P(A_T|X=1) = \frac{P(A_T)P(X=1|A_T)}{P(A_T)P(X=1|A_T) + P(A_C)P(X=1|A_C)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = \frac{3}{5}$$

iii) Calcolare la densità discreta di Y (ossia $P(Y=h)$, per i valori h che può assumere Y).

RISPOSTA: $P(Y=1) = \frac{1}{2}, \quad P(Y=2) = \frac{1}{4}, \quad P(Y=3) = \frac{1}{4}$

Infatti, posto $C_i = \{$*esce un numero minore o uguale di tre, all'i-simo lancio del dado da parte di Giuseppe*$\}$

$$P(Y=1) = P(C_1) = \frac{1}{2}, P(Y=2) = P(C_1^c \cap C_2) = P(C_1^c)P(C_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$
$$P(Y=3) = 1 - \big(P(Y=1) + P(Y=2)\big) = 1 - \big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\big) = \frac{1}{4}$$

oppure

$$P(Y=3) = P(C_1^c \cap C_2^c) = P(C_1^c)P(C_2^c) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

iv) Calcolare il valore atteso di Y (ossia $E(Y)$).

RISPOSTA: $E(Y) = \frac{5}{4}$

Infatti

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{3} i\, P(Y=i) = 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

v) Calcolare la probabilità dell'evento $A = \{$*Mario e Giuseppe scendono alla stessa fermata*$\}$

RISPOSTA:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X=Y) = P(X=1)P(Y=1) + P(X=2)P(Y=2) + P(X=3)P(Y=3) \\ &= \frac{5}{12}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{17}{72} + \frac{1}{4}\frac{25}{72} \\ &\left(= \frac{30}{72}\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\frac{17}{72} + \frac{1}{4}\frac{35}{72}\frac{1}{4\cdot 72}(60+17+25) = \frac{1}{4}\frac{102}{72} = \frac{51}{144}\right) \end{aligned}$$

Infatti

$$A = \{X = Y\} = \{X = 1, Y = 1\} \cup \{X = 2, Y = 2\} \cup \{X = 3, Y = 3\}$$

quindi

$$P(A) = P(X = Y) = P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 2) + P(X = 3, Y = 3)$$

ed, essendo le variabili aleatorie X e Y indipendenti (si tratta di due dadi diversi),

$$P(A) = P(X = 1)P(Y = 1) + P(X = 2)P(Y = 2) + P(X = 3)P(Y = 3).$$

Laurea triennale in INFORMATICA, Corso di **CALCOLO DELLE PROBABILITÀ**

Prof. G. Nappo – COMPITO - 2 luglio 2012

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) ____________________

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli **giustificando** brevemente i passaggi svolti.
ATTENZIONE: Svolgere tutti i calcoli fino in fondo.

Esercizio 3.

Si U una variabile aleatoria a valori in $\{0,+1,+2\}$ e V una variabile aleatoria a valori in $\{-1,0,+1\}$ tali che

$$P(U=0,V=\pm1)=P(U=2,V=\pm1)=c,\quad P(U=+1,V=\pm1)=2c,$$

$$\text{e}\quad P(U=0,V=0)=P(U=+1,V=0)=P(U=2,V=0)=c$$

i) $*$ Calcolare c.

ii) $*$ Calcolare la densità discreta di V e il suo valore atteso e la sua varianza.

iii) (a) Calcolare $Cov(U,V)$. (b) Le variabili aleatorie U e V sono indipendenti?

iv) Calcolare (a) la probabilità che $U\cdot V$ sia strettamente minore di 0 e (b) la probabilità che $U=1$ dato che $U\cdot V$ è strettamente minore di 0.

v) Se X_n, $n\geq 1$ sono variabili aleatorie indipendenti con la stessa legge di V, e $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$ trovare una approssimazione per $P(S_n\leq 0)$, per n grande.

vi) (facoltativo: perché inserito successivamente) Trovare una approssimazione per $P(S_{2200}\leq -20)$.

Soluzioni

i) $*$ Calcolare c.

RISPOSTA: $c=\frac{1}{11}$

Infatti

$$\begin{aligned}1&=\sum_{u\in\{0,1,2\}}\sum_{v\in\{-10,1\}}P(U=u,V=v)\\&=P(U=0,V=-1)+P(U=0,V=0)+P(U=0,V=1)\\&+P(U=1,V=-1)+P(U=1,V=0)+P(U=1,V=1)\\&+P(U=2,V=-1)+P(U=2,V=0)+P(U=2,V=1)\\&=c+c+c\;+\;2c+c+2c\;+\;c+c+c=11c\end{aligned}$$

da cui $11c=1$, cioè $c=\frac{1}{11}$.

ii) $*$ Calcolare la densità discreta di V e il suo valore atteso e la sua varianza.

RISPOSTA:
densità discreta $p_V(-1)=P(V=-1)=\frac{4}{11}$, $p_V(0)=P(V=0)=\frac{3}{11}$, $p_V(1)=P(V=1)=\frac{4}{11}$
$E(V)=0,\quad Var(V)=\frac{8}{11}$

Infatti

$$p_V(v)=\sum_{u\in\{0,1,2\}}P(U=u,V=v)$$

da cui

$$
\begin{aligned}
p_V(-1) &= P(U=0,V=-1)+P(U=1,V=-1)+P(U=2,V=-1)\\
&= c+2c+c+=4c=\frac{4}{11}\\
p_V(-0) &= P(U=0,V=0)+P(U=1,V=0)+P(U=2,V=0)\\
&= c+c+c+=3c=\frac{3}{11}\\
p_V(1) &= P(U=0,V=1)+P(U=1,V=1)+P(U=2,V=1)\\
&= c+2c+c+=4c=\frac{4}{11}
\end{aligned}
$$

per cui

$$
\begin{aligned}
E(V) &= \sum_{v\in\{-1,0,1\}} v p_V(v) = \sum_{v\in\{-1,0,1\}} vP(V=v)\\
&= (-1)\,\frac{4}{11}+0\,\frac{3}{11}+1\,\frac{4}{11}=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(V) = E\big((V-E(V))^2\big) = E(V^2) = \sum_{v\in\{-1,0,1\}} v^2 p_V(v) = \sum_{v\in\{-1,0,1\}} v^2 P(V=v)\\
= (-1)^2\,\frac{4}{11}+0^2\,\frac{3}{11}+1^2\,\frac{4}{11}=\frac{8}{11}
\end{aligned}
$$

iii) (a) Calcolare $Cov(U,V)$. (b) Le variabili aleatorie U e V sono indipendenti?

RISPOSTA: (a) $Cov(U,V)=0$ (b) Le variabili aleatorie U e V **NON sono indipendenti**

(Osservazione: E' noto che se due variabili aleatorie sono indipendenti e con valore atteso finito, allora sono scorrelate (ovvero la loro Covarianza è nulla) Il caso di questo esercizio mostra che il viceversa NON E' VERO: cioè la non correlazione NON implica l'indipendenza, ossia è possibile che la covarianza di due variabili aleatorie sia nulla anche quando le due variabili aleatorie sono DIPENDENTI)

Infatti
(a)

$$
\begin{aligned}
Cov(U,V) &:= E\big((U-E(U))(V-E(V)\big) = E(UV)-E(U)E(V) = E(UV)-E(U)\cdot 0 = E(UV)\\
&= \sum_{u\in\{0,1,2\}}\sum_{v\in\{-10,1\}} uvP(U=u,V=v)\\
&= 0\cdot(-1)P(U=0,V=-1)+0\cdot 0P(U=0,V=0)+0\cdot 1P(U=0,V=1)\\
&+1\cdot(-1)P(U=1,V=-1)+1\cdot 0P(U=1,V=0)+1\cdot 1P(U=1,V=1)\\
&+2\cdot(-1)P(U=2,V=-1)+2\cdot 0P(U=2,V=0)+2\cdot 1P(U=2,V=1)\\
&= 0c+0c+0c\ +(-1)\,(2c)+0c+1\,(2c)\ +\ (-2)c+0c+2c=0
\end{aligned}
$$

(b)
Le due variabili aleatorie U e V sarebbero indipendenti se per ogni $u\in\{0,1,2\}$ e per ogni $v\in\{-1,0,1\}$ si avesse $P(U=u,V=v)=P(U=u)P(V=v)$
o, equivalentemente,
la densità discreta congiunta di U, V, ossia $p_{U,V}(u,v)\big(:=P(U=u,V=v)\big)$ è il prodotto delle densità discrete marginali $p_U(u)\big(:=P(U=u)\big)$ e $p_V(v)\big(:=P(V=v)\big)$, ossia

$$
\forall u\in\{0,1,2\},\ \forall v\in\{-1,0,1\} \qquad p_U,V(u,v)=p_U(u)\cdot p_V(v).
$$

Per mostrare che U e V non sono indipendenti, basta quindi trovare una coppia (u,v) per la quale valga

$$
P(U=u,V=v)\neq P(U=u)P(V=v),
$$

ad esempio

$$
P(U=1,V=1)=2c=\frac{2}{11}\neq P(U=1)P(V=1)=\big(\sum_{v\in\{-1,0,1\}} P(U=1,V=v)\big)\cdot\frac{4}{11}=(2c+c+2c)\cdot\frac{4}{11}=\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{11}
$$

iv) Calcolare (a) la probabilità che $U \cdot V$ sia strettamente minore di 0 e (b) la probabilità che $U = 1$ dato che $U \cdot V$ è strettamente minore di 0.

RISPOSTA: (a) $P(UV < 0) = \frac{3}{11}$ (b) $P(U = 1|UV < 0) = \frac{2}{3}$

Infatti,
(a)

$$P(UV < 0) = P(U = 1, V = -1) + P(U = 2, V = -1) = 2c + c = 3c = \frac{3}{11}$$

(b)

$$P(U = 1|UV < 0) = \frac{P(U = 1, UV < 0)}{P(UV < 0)} = \frac{P(U = 1, V = -1)}{P(UV < 0)} = \frac{2c}{3c} = \frac{2}{3}$$

v) Se X_n, $n \geq 1$ sono variabili aleatorie indipendenti con la stessa legge di V, e $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ trovare una approssimazione per $P(S_n \leq 0)$, per n grande.

RISPOSTA: $P(S_n \leq 0)$ vale circa 1/2

Infatti

$$P(S_n \leq 0) = P(\frac{S_n - E(S_n)}{Var(S_n)} \leq \frac{0 - E(S_n)}{Var(S_n)}) = P(S_n^* \leq 0)$$

in quanto $E(S_n) = nE(V) = 0$ e $Var(S_n) = nVar(V) = n\,\frac{8}{11}$ e per il teorema centrale del limite si ha che

$$P(S_n^* \leq 0) \cong \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

Ricordiammo che l'uguaglianza $\Phi(0) = 1/2$ di deduce immadiatamente dalla relazione $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, applicata a $x = 0$. Allo stesso risultato si arriva facilmente dalla simmetria (rispetto a zero) della densità di probabilita' di una variabile aleatoria Y, Gaussiana standard: infatti la densità vale $\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-y^2/}$ e si ha $\varphi(y) = \varphi(-y)$ e quindi $P(Y > 0) = \int_0^\infty \varphi(y)dy = \int_{-\infty}^0 \varphi(y)dy = P(Y \leq 0)$, tenendo conto che $1 = P(Y > 0) + P(Y \leq 0)$.

vi) (facoltativo: perché inserito successivamente) Trovare una approssimazione per $P(S_{2200} \leq -20)$.

RISPOSTA: $P(S_{2200} \leq -20)$ vale circa 0.3085

Infatti

$$P\big(S_{2200} \leq -20) = P(\frac{S_{2200} - E(S_{2200})}{Var(S_{2200})} \leq \frac{-20 - E(S_{2200})}{Var(S_{2200})}) = P(S_{2200}^* \leq \tfrac{-20}{40}) = P(S_{2200}^* \leq -\tfrac{1}{2}))$$

in quanto $E(S_{2200}) = 2200\,E(V) = 0$ e $Var(S_{2200}) = 2200Var(V) = 2200\,\frac{8}{11} = 200 \cdot 8 = 1600$ e per il teorema centrale del limite si ha che

$$P(S_{2200}^* \leq -\tfrac{1}{2}) \cong \Phi(-\tfrac{1}{2}) = 1 - \Phi(-\tfrac{1}{2}) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0,6915 = 0.3085$$