

Laurea triennale in INFORMATICA, Corso di **CALCOLO DELLE PROBABILITÀ**
SECONDA PROVA IN ITINERE - 4 giugno 2013 - FOGLIO RISPOSTE

NOME e COGNOME _____

CANALE: G. Nappo VOTO: _____

N.B. Scrivere le risposte dei vari punti degli esercizi

oppure, in mancanza di tempo e/o di spazio, mettere una croce sui punti risolti degli esercizi. **ATTENZIONE**
ALLE DOMANDE CON L'ASTERISCO *

Esercizio 1.

i) * _____

ii) * _____

iii) (a) _____ (b) _____

iv) _____

v) (a) _____ (b) (**facoltativo**) _____

vi) (a) _____ (b) (**facoltativo**) _____

Esercizio 2.

i) * _____

ii) * (a) _____ * (b1) _____ * (b2) _____

iii) _____

iv) _____

v) (**facoltativo**) _____

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) _____

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli **GIUSTIFICANDO** brevemente i passaggi svolti.

ATTENZIONE: Svolgere tutti i calcoli fino in fondo.

Esercizio 1. Siano U e V due variabili aleatorie con U a valori in $\{-1, 0, +1\}$ e V a valori in $\{-1, 0, +1, +2\}$ tali che

$$P(U = -1, V = -1) = P(U = -1, V = +1) = P(U = +1, V = -1) = P(U = +1, V = +1) = c,$$

$$P(U = -1, V = 2) = P(U = 0, V = 2) = P(U = +1, V = 2) = P(U = 0, V = 0) = 2c$$

e $P(U = i, V = j) = 0$ per i rimanenti valori di (i, j) .

- i)* * **Spiegare** perché $c = \frac{1}{12}$.
- ii)* * Calcolare la densità discreta di U e il suo valore atteso e la sua varianza
- iii)* (a) Calcolare $Cov(U, V)$. (b) Le variabili aleatorie U e V sono indipendenti?
- iv)* Calcolare valore atteso e varianza di $X = UV$, mostrando che $E(X) = 0$ e $Var(X) = \frac{5}{3}$.
(**suggerimento per abbreviare i calcoli:** ricordare la formula per calcolare $E[g(U, V)]$)
- v)* (a) Utilizzando la disuguaglianza di Chebyshev trovare una minorazione per $P(|X| \leq \frac{5}{3})$.
(b) (**facoltativo**) Calcolare esattamente $P(|X| \leq \frac{5}{3})$.
- vi)* Se $\{X_i\}_{i \geq 1}$ è una successione di variabili aleatorie (globalmente) indipendenti e tutte con la stessa legge di X , calcolare approssimativamente

$$(a) \quad P\left(\sum_{i=1}^{240} X_i \leq \frac{226}{10}\right) \quad e \quad (b) \quad (\text{facoltativo}) \quad P\left(\sum_{i=1}^{240} X_i \geq -\frac{226}{10}\right).$$

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) _____

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi esclusivamente su questi fogli giustificando brevemente i passaggi svolti. È necessario svolgere tutti i calcoli fino in fondo, almeno per i punti *i*, *ii* e *iii*).

Esercizio 2.

Si lancia un dado ben equilibrato a quattro facce (numerato da 1 a 4). Sia X il valore ottenuto. A questo punto si prende un'urna e si mettono nell'urna X palline bianche e $4 - X$ palline rosse (ossia, se $X = k$ la composizione dell'urna diventa " k palline bianche e $4 - k$ palline rosse") e si estraggono dall'urna due palline **SENZA REINSERIMENTO**.

Posto Y_B il numero di **PALLINE BIANCHE** ottenute in questo modo (dalle due estrazioni).

- i*) * Calcolare $P(Y_B = 0|X = k)$, per $k = 1, 2, 3, 4$ e $P(Y_B = 0)$
- ii*) * (a) **Sapendo che sono uscite solo palline rosse**, calcolare la probabilità che nel lanciare il dado sia uscito il numero 2.
 * (b1) Stessa domanda con il numero 1 al posto del numero 2 * (b2) Stessa domanda con 4 al posto del numero 2.
- iii*) Mostrare che $\mathbb{E}(Y_B) = 5/4$
- iv*) Scrivere l'espressione della densità discreta di Y_B .
- v*) (**facoltativo**) Scrivere l'espressione della densità discreta congiunta di X e Y_B , specificando per quali valori è diversa da zero.