Esercizi svolti e da svolgere
sugli argomenti trattati nella lezione 11

Esercizi svolti

Es. 1. Si considerino le funzioni booleane $f(x, y, z, t)$ e $g(x, y, z, t)$ tali che:

- f dà 1 se e solo se la stringa $xyzt$ contiene un numero pari di 1;
- g dà 1 se e solo se la stringa $xyzt$ vista come numero intero è divisibile per 2.

Si diano per f e g : la forma canonica congiuntiva e disgiuntiva, la minima forma SOP e POS ed infine la minima espressione booleana (ottenuta usando le porte composte, cioè NAND, NOR, …)

SOLUZIONE:

La rappresentazione tabellare di f e g è:

x	***y***	***z***	***t***	***f***	***g***
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0

Indichiamo con mi e Mi (per i = 0, …, 15) il mintermine ed maxtermine associati alla riga i-esima della tabella. Ad esempio

m2 = $\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z \cdot \bar{t}$ e M2 = $x + y + \bar{z} + t$

Con questo formalismo le forme canoniche sono:

FCD(f) = m0 + m3 + m5 + m6 + m9 + m10 + m12 + m15
FCC(f) = M1 · M2 · M4 · M7 · M8 · M11 ·M13 · M14

FCD(g) = m0 + m2 + m4 + m6 + m8 + m10 + m12 + m14
FCC(g) = M1 · M3 · M5 · M7 · M9 ·M11 ·M13 · M15

Passiamo alle minime forme SOP e POS. Per quanto riguarda f è facile convincersi (facendo la mappa di Karnaugh) che le minime SOP e POS corrispondono rispettivamente alla FCC e FCD. Per g invece si ha:

xy \ zt	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

da cui minSOP(g) = $\bar{t}$. Per la minPOS, si può usare la mappa di Karnaugh per g e ricoprire gli 0 oppure osservare che

$$\text{minPOS}(g) = \overline{\text{minPOS}(\neg g)}$$

cioè bisogna ricoprire gli 1 della seguente mapa:

xy \ zt	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

In entrambe i casi, si ottiene che minPOS(g) = $\bar{t}$.

Infine, per quanto riguarda le minime espressioni booleane, è facile convincersi che per g l'espressione minima è la minSOP (o equivalentemente la minPOS). Per f , utilizzando porte XOR e NXOR (indicate rispettivamente $\oplus$ e $\otimes$) e fattorizzando opportunamente la FCC, si ha

$$\begin{aligned}
\text{FCC}(f) &= (x+y+z+\underline{t})\,(x+y+\underline{z}+t)\,(x+\underline{y}+z+t)\,(x+\underline{y}+\underline{z}+\underline{t})\,(\underline{x}+y+z+t)\,(\underline{x}+y+\underline{z}+\underline{t})\,(\underline{x}+\underline{y}+z+\underline{t})\,(\underline{x}+\underline{y}+\underline{z}+t) \\
&= (x+y+(z+\underline{t})(\underline{z}+t))\,(x+\underline{y}+(z+t)(\underline{z}+\underline{t}))\,(\underline{x}+y+(z+t)(\underline{z}+\underline{t}))\,(\underline{x}+\underline{y}+(z+\underline{t})(\underline{z}+t)) \\
&= (x+y+(z\otimes t))\,(x+\underline{y}+(z\oplus t))\,(\underline{x}+y+(z\oplus t))\,(\underline{x}+\underline{y}+(z\otimes t)) \\
&= ((x+y)(\underline{x}+\underline{y})+(z\otimes t))\,((x+\underline{y})(\underline{x}+y)+(z\oplus t)) \\
&= ((x\oplus y)+(z\otimes t))\,((x\otimes y)+(z\oplus t)) \\
&= (x\oplus y)\otimes(z\oplus t)
\end{aligned}$$

Infatti, è facile verificare che $(a+\underline{b})(\underline{a}+b) = (a\otimes b)$ e $(a+b)(\underline{a}+\underline{b}) = (a\oplus b)$.
Per esempio,

$$(a+\bar{b})(\bar{a}+b) = \overline{\overline{(a+\bar{b})}+\overline{(\bar{a}+b)}} = \overline{\bar{a}b+a\bar{b}} = \overline{a\oplus b} = a\otimes b$$

Quindi,

$$\text{minEB}(f) = (x\oplus y)\otimes(z\oplus t)$$

Esercizi da svolgere

Es. 1. Si consideri la funzione che dà 1 solo quando il suo input (da 4 bit) rappresenta un numero intero (con segno!) in complemento a 2 che sia multiplo di 3. Non si consideri la sequenza 1000 (cioè, su tale sequenza la funzione non è definita). Si calcolino la minima SOP e POS associate a detta funzione.

Es. 2. Si trovi la minima forma SOP associata all'espressione: $(x \oplus (y \text{ NAND } z)) \text{ NOR } \bar{x}$