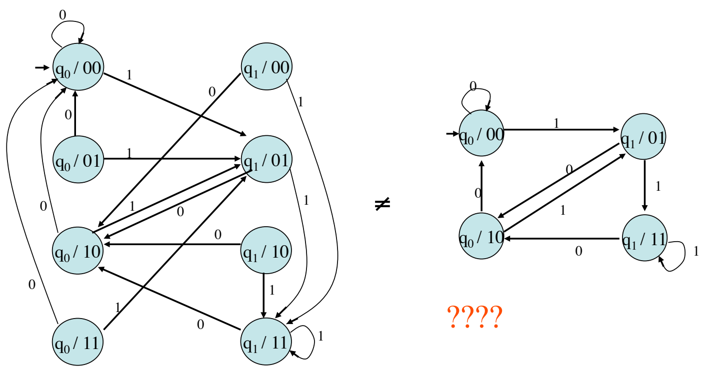
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Minimizzazione di automi

Prof. Daniele Gorla

Due automi di Moore per esempio dei resti MOD 4

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA



????

Automa minimo

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Def.: due automi (dello stesso tipo) sono *equivalenti* se, per ogni possibile sequenza di input, generano entrambi la stessa sequenza di output.

N.B.: i due automi di Moore precedenti sono equivalenti (a fronte dello stesso input danno stesso output), ma il primo è molto più complesso del secondo!

L'*automa minimo equivalente a M* è quell'automa equivalente a M ma con il minor numero possibile di stati (e transizioni)

N.B.: si può dimostrare che tale automa è *unico*, a meno di ridenominazioni degli stati

Come vedremo, un automa è un modello astratto di una rete sequenziale. Quindi, conviene minimizzare un automa, poiché un numero di stati minore implica una riduzione del numero di componenti di memoria nel circuito corrispondente.

Problema: dato M, come trovare l'automa minimo ad esso equivalente?

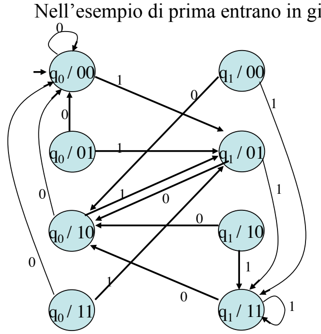
Stati irraggiungibili

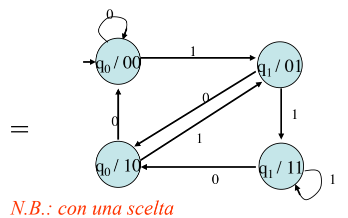
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Il primo passo per la minimizzazione è la rimozione degli *stati irraggiungibili*, cioè quegli stati q tali che, per ogni sequenza di input $a_1 \ldots a_n$, si ha che

$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \ldots \xrightarrow{a_n} q_n \neq q$$

Nell'esempio di prima entrano in gioco solo gli stati irraggiungibili:



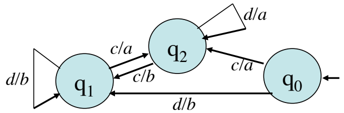


N.B.: con una scelta diversa dello stato iniziale, avrei avuto un automa minimo diverso

Stati indistinguibili (1)

…ma non basta eliminare gli stati irraggiungibili.

Es.:

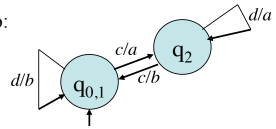


Gli stati q_0 e q_1 si comportano allo stesso modo: a fronte dello stesso carattere in input, danno lo stesso output e vanno nello stesso stato.

→ non ha senso avere q_0 e q_1 come stati distinti → LI FONDO

q_2, invece, si comporta diversamente e deve restare distinto

Automa minimo:

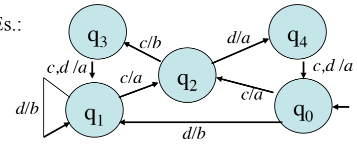


Stati indistinguibili (2)

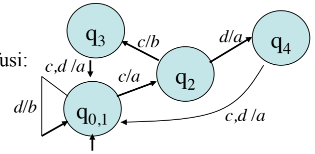
SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

…l'indistinguibilità è un'evoluzione di questa nozione.

Es.:

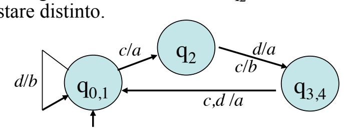


Gli stati q_0 e q_1 sono indistinguibili e vanno fusi:



Ciò rende anche q_3 e q_4 indistinguibili, che vanno fusi; q_2, invece, si comporta diversamente e deve restare distinto.

Automa minimo:

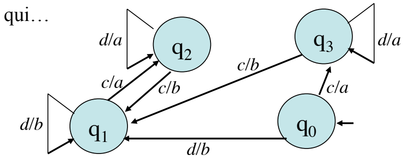


Stati indistinguibili (3)

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

…ma non finisce qui…

Es.:



Gli stati q_0 e q_1 a fronte dello stesso input danno lo stesso output, ma col carattere *c* non vanno nello stesso stato.

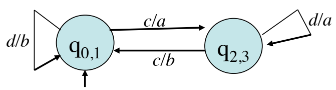
→ se q_2 e q_3 sono indistinguibili, anche q_0 e q_1 lo sono (vedi caso precedente)

Gli stati q_2 e q_3 a fronte dello stesso input danno lo stesso output, ma col carattere *d* non vanno nello stesso stato.

→ l'indistinguibilità di q_2 e q_3 dipende dall'indistinguibilità di q_2 e q_3

→ definendo indistinguibili come non distinguibili (vedi poi),posso fonderli

Automa minimo:



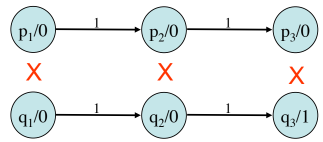
Distinguibilità (Moore)

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

In un automa di Moore due stati si dicono *distinguibili* se

1. gli output ad essi associati sono diversi, oppure
2. hanno una transizione uscente etichettata con lo stesso carattere che porta a stati distinguibili.

Es.:



In: ε, Out_{p3}: 0, Out_{q3}: 1

In: 1, Out_{p2}: 00, Out_{q2}: 01

In: 11, Out_{p1}: 000, Out_{q1}: 001

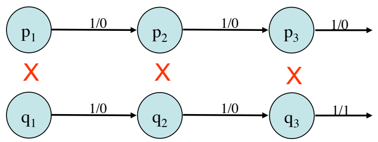
Distinguibilità (Mealy)

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

In un automa di Mealy due stati si dicono *distinguibili* se hanno una transizione uscente etichettata con lo stesso carattere ma che

1. restituisce output diversi, oppure
2. porta a stati distinguibili.

Es.:



In: 1, Out_{p3}: 0, Out_{q3}: 1

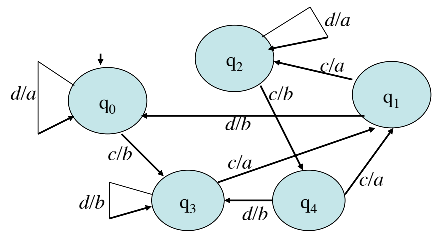
In: 11, Out_{p2}: 00, Out_{q2}: 01

In: 111, Out_{p1}: 000, Out_{q1}: 001

Algoritmo per l'automa minimo (passo 0: stati irraggiungibili)

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Rimuovi tutti gli stati irraggiungibili



In questo esempio non ci sono stati irraggiungibili partendo da q_0!

Algoritmo per l'automa minimo (passo 1: tabella triangolare)

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Considera tutte le coppie di stati, per vedere se sono distinguibili o meno.

q0					
q1					
q2					
q3					
q4					
	q0	q1	q2	q3	q4

Inutile perché già considero la coppia simmetrica nella parte inferiore

Inutile perché sicuramente non distinguibili

Ciò che resta è una tabella triangolare inferiore in cui mettere il risultato del confronto di ogni coppia di stati che possono essere distinguibili.

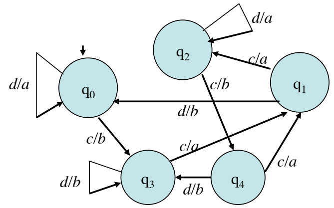
Algoritmo per l'automa minimo (passo 2: distinguibilità immediata)

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Marcatura delle celle: Condizione 1 di distinguibilità

Si esaminano una dopo l'altra tutte le celle di tale tabella e si guarda la coppia di stati ad esse associati; nella cella metti una X se la condizione è verificata (stati con output diversi – per Moore – o stati con una transizione uscente con stesso input ma output diverso – per Mealy)

q1	X			
q2		X		
q3	X		X	
q4	X		X	
	q0	q1	q2	q3



Algoritmo per l'automa minimo (passo 3: distinguibilità propagata)

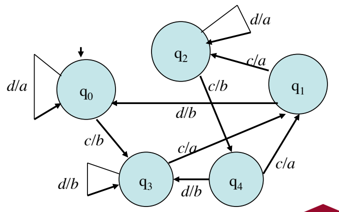
SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Marcatura delle celle: Condizione 2 di distinguibilità

Si esaminano una dopo l'altra tutte le celle non ancora marcate e si guarda la coppia di stati ad esse associati; nella cella metti

- una X se a fronte dello stesso input vai in una coppia già marcata con X;
- una O se, per ogni possibile input, o vai nello stesso stato o in coppie di stati già marcati con O o nella coppia in questione;
- se nessuna delle due condizioni è verificata, segna nella cella tutte le coppie di stati non marcate con O e diverse dalla coppia in questione in cui arrivi con lo stesso input.

q1	X			
q2	(3,4)	X		
q3	X	X	X	
q4	X	X	X	O
	q0	q1	q2	q3



Algoritmo per l'automa minimo (passo 4: riempimento della tabella)

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Inserisci una marcatura per ogni coppia

Per tutte le celle che contengono (almeno) una coppia di stati, verifica se tali stati sono stati marcati

- se sono stati marcati con una X, marca la cella corrente con una X;
- se sono stati marcati con una O, cancella la coppia dalla cella;
- altrimenti lascia la coppia nella cella.

Se alla fine la cella risulta vuota, marcala con O.

Itera questo passo finchè ogni cella è marcata o con X o con O.

q1	X			
q2	(3,4) O	X		
q3	X	X	X	
q4	X	X	X	O
	q0	q1	q2	q3

Algoritmo per l'automa minimo (passo 5: automa minimo)

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Al termine dell'algoritmo, TUTTE le coppie di stati equivalentisaranno marcate con O; quindi, se (q,q') e (q',q'') sono marcate con O, allora anche (q,q'') è marcata con O!

Dalla tabella triangolare si ottengono le *classi di indistinguibilità* (o di equivalenza): due stati sono nella stessa classe se e solo se la coppia ad essi associata è marcata con O nella tabella.

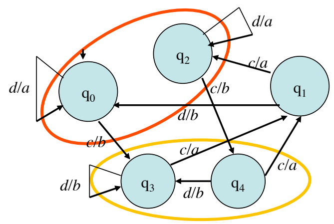
L'automa minimo ha

- come stati le classi di indistinguibilità;
- come stato iniziale la classe che contiene lo stato iniziale;
- come funzione di transizione la funzione ottenuta mettendo

  (classe(q) , *a*) → classe(q')   per ogni (q,*a*) → q' ∈δ
- come funzione di output la funzione ottenuta mettendo
  - alla classe di q l'output di q (Moore)
  - alla transizione (classe(q),*a*) → classe(q') l'output di (q,*a*) → q' (Mealy)

Esempio

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica



q1	X			
q2	O	X		
q3	X	X	X	
q4	X	X	X	O
	Q0	q1	q2	q3