SOLUZIONI di ESAME di PROGETTAZIONE di SISTEMI DIGITALI

22 gennaio 2013 - Canale AL - prof. Gorla **FILA A**

**Esercizio 1.** *a)* Si converta in base 2 il numero 35,73 espresso in base 10; si usi una rappresentazione in virgola mobile con 10 bit di mantissa e 4 di esponente *(3 punti)*:

Convertiamo separatamente 35 e 0,73.

| | |
|---|---|
| 35:2 | 1 |
| 17:2 | 1 |
| 8:2 | 0 |
| 4:2 | 0 |
| 2:2 | 0 |
| 1:2 | 1 |
| 0 | |

$35_{(10)} = 100011_{(2)}$

Nel convertire 0,73 in binario consideriamo che dei 10 bit di mantissa ne verranno già usati 6 e quindi ne dobbiamo calcolare solo 4.

| | | |
|---|---|---|
| 0,73x2 | 1,46 | 1 |
| 0,46x2 | 0,92 | 0 |
| 0,92x2 | 1,84 | 1 |
| 0,84x2 | 1,68 | 1 |

Quindi

$35{,}73_{(10)} \approx 100011{,}1011_{(2)}$

che, normalizzato, dà

**<0,1000111011,0110>**

*b)* si sommi il numero così ottenuto con <1,1100110000,1110>, dove l'esponente è nella rappresentazione in complemento a 2 *(3 punti)*:

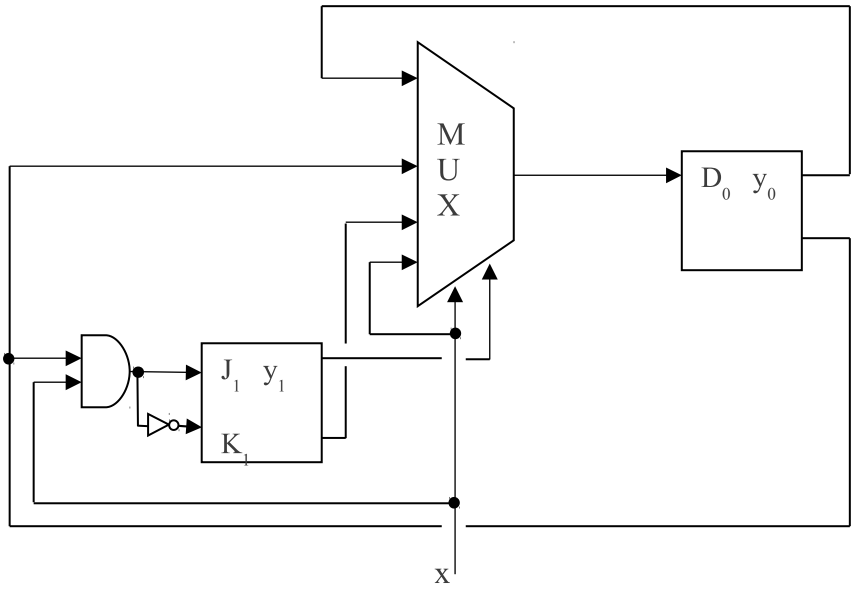
L'esponente del secondo numero è negativo e quindi minore di quello del primo. Nel secondo numero dovrà essere quindi spostata la virgola a sinistra per ottenere una rappresentazione con esponente uguale al primo. Per calcolare di quanti posti devo spostare la virgola calcolo la differenza tra gli esponenti, ovvero 6 - (-2) = 8.

La mantissa del secondo numero diventa quindi 0,0000000011 (escludendo i bit successivi ai 10 rappresentabili).Poichè il secondo numero è negativo, bisogna sottrarre le mantisse.

```
  0,1000111011  -
  0,0000000011  =
-----------------
  0,1000111000
```

Il risultato è **<0,1000111000,0110>**

**Esercizio 2.** Si consideri la seguente rete sequenziale (senza output):




Se ne effettui l'analisi, fino alla scrittura dell'automa senza output. In particolare:
a)Si scrivano le espressioni booleane associate alle entrate dei FF *(4 punti)*:

$$D_0=(\overline{x}\cdot\overline{y_1})\cdot y_0+(\overline{x}\cdot y_1)\cdot\overline{y_0}+(x\cdot\overline{y_1})\cdot\overline{y_1}+(x\cdot y_1)\cdot x=\overline{x}\cdot y_0\cdot\overline{y_1}+\overline{x}\cdot\overline{y_0}\cdot y_1+x\cdot\overline{y_1}+x\cdot y_1$$
$$J_1=\overline{y_0}\cdot x$$
$$K_1=\overline{\overline{y_0}\cdot x}$$

b)Si semplifichi l'espressione ottenuta per $d_0$ usando gli assiomi dell'algebra di Boole (specificando quali si usano) e altri operatori logici *(2 punti)*:

$D_0=\overline{x}\cdot y_0\cdot\overline{y_1}+\overline{x}\cdot\overline{y_0}\cdot y_1+x\cdot\overline{y_1}+x\cdot y_1=$
$=\overline{x}\cdot(y_0\cdot\overline{y_1}+\overline{y_0}\cdot y_1)+x\cdot(\overline{y_1}+y_1)=$ (applicando la proprietà distributiva)
$=\overline{x}\cdot(y_0\cdot\overline{y_1}+\overline{y_0}\cdot y_1)+x=$ (proprietà dell'elemento complementare e dell'elemento neutro)
$=\overline{x}\cdot(y_0\,\mathrm{XOR}\,y_1)+x=$ (applicando la definizione di **XOR** )

c)Si scriva la forma canonica disgiuntiva dell'espressione ottenuta al punto (a) per $d_0$ *(1 punto)*:

$D_0=\overline{x}\cdot y_0\cdot\overline{y_1}+\overline{x}\cdot\overline{y_0}\cdot y_1+x\cdot\overline{y_1}+x\cdot y_1=\overline{x}\cdot y_0\cdot\overline{y_1}+\overline{x}\cdot\overline{y_0}\cdot y_1+x\cdot\overline{y_1}\cdot(y_0+\overline{y_0})+x\cdot y_1\cdot(y_0+\overline{y_0})=$
$=\overline{x}\cdot y_0\cdot\overline{y_1}+\overline{x}\cdot\overline{y_0}\cdot y_1+x\cdot y_0\cdot\overline{y_1}+x\cdot\overline{y_0}\cdot\overline{y_1}+x\cdot y_0\cdot y_1+x\cdot\overline{y_0}\cdot y_1$

d)Si scriva la tabella degli stati futuri *(2 punti)*:

| $Q_1$ | $Q_0$ | x | $J_1$ | $K_1$ | $D_0$ | $Q_1'$ | $Q_0'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |

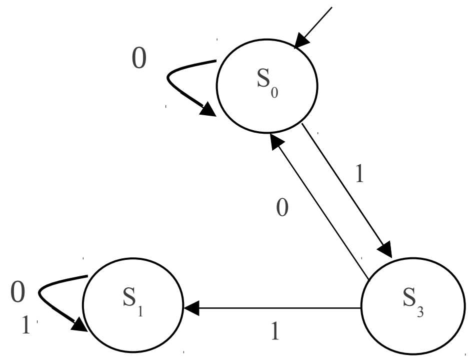
e)Si ricavi dalla tabella l'automa senza output, assumendo che inizialmente entrambi i FF contengano il valore 0 *(1 punto)*:

Definiamo gli stati dell'automa in base ai valori di $Q_1$ e $Q_0$.

$S_0$: (0,0)
$S_1$: (0,1)
$S_2$: (1,0)
$S_3$: (1,1)

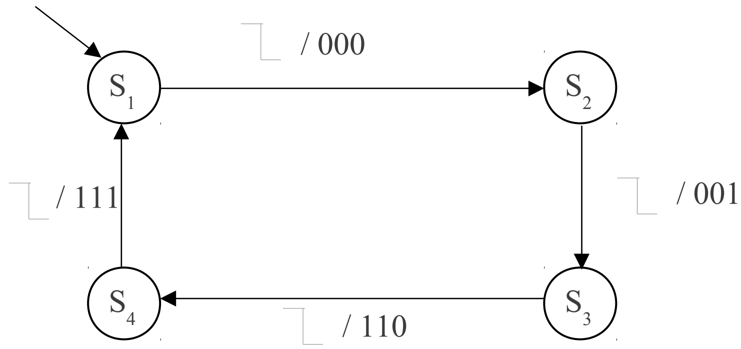
| **Stato Presente** | **x** | **Stato Futuro** |
|---|---|---|
| $S_0$ | 0 | $S_0$ |
| $S_0$ | 1 | $S_3$ |
| $S_3$ | 0 | $S_0$ |
| $S_3$ | 1 | $S_1$ |
| $S_1$ | 0 | $S_1$ |
| $S_1$ | 1 | $S_1$ |

Lo stato $S_2$ non è raggiungibile.




**Esercizio 3.** *a)* Si realizzi un contatore che ciclicamente restituisce 000, 001, 110 e 111, usando un FF di tipo T e uno di tipo SR *(6 punti)*.

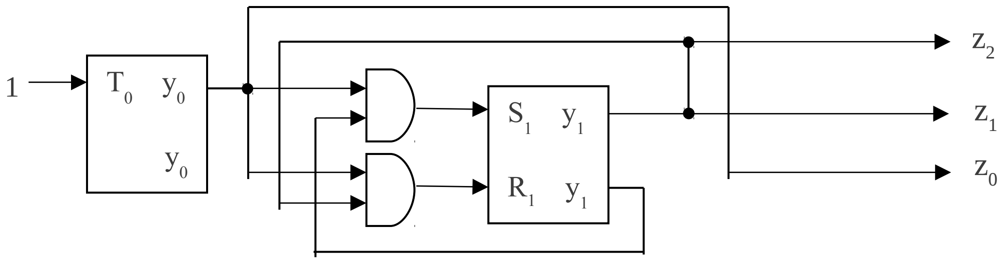
Rappresentiamo la funzionalità con un automa di Mealy.



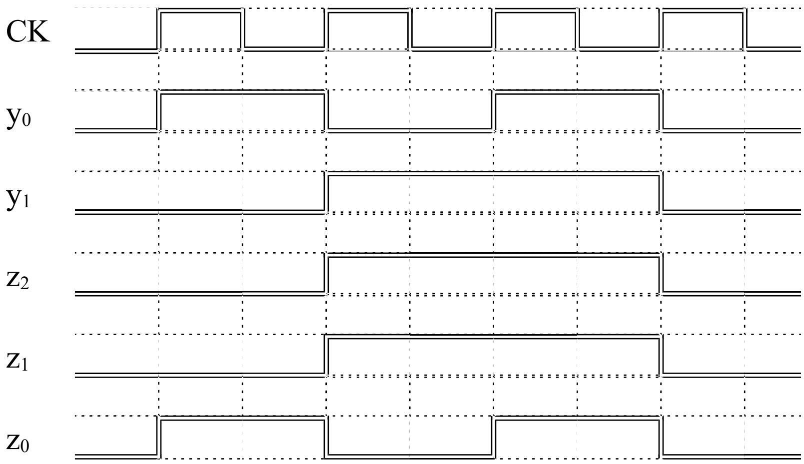

| **$y_1$** | **$y_0$** | **$z_2$** | **$z_1$** | **$z_0$** | **$y_1'$** | **$y_0'$** | **$S_1$** | **$R_1$** | **$T_0$** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | X | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | X | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Le espressioni SOP minimali sono:

$z_2 = y_1$
$z_1 = y_1$
$z_0 = y_0$
$S_1 = y_0 \cdot \overline{y_1}$
$R_1 = y_0 \cdot y_1$
$T_0 = 1$




*b)* Disegnare il diagramma temporale del circuito ottenuto, visualizzando sia i valori memorizzati nei FF che gli output *(2 punti)*:

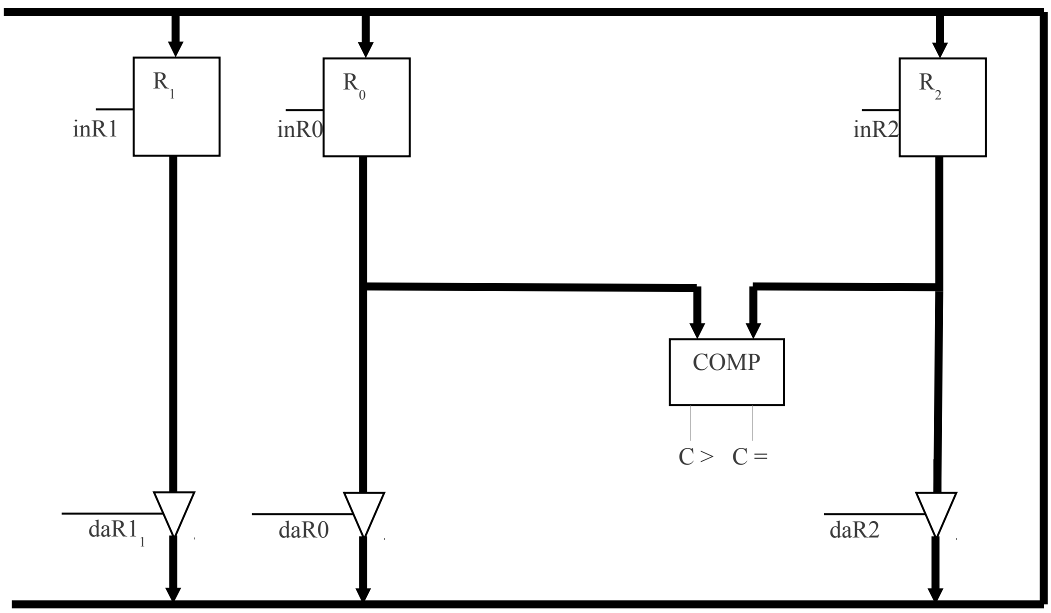


**Esercizio 4** Si supponga di avere 3 registri (da *n* bit, con *n* generico) $R_0$, $R_1$ ed $R_2$, e due segnali di controllo $c_1$ e $c_0$. Si progetti un'interconnessione tale che:

- Se $c_0 = c_1 = 0$, allora copia $R_1$ in $R_0$;
- Se $c_0 = 0$ e $c_1 = 1$, allora copia in $R_1$ il massimo tra $R_0$ ed $R_2$;
- Se $c_0 = 1$ e $c_1 = 0$, allora copia $R_0$ in $R_2$.

Si specifichi lo schema di interconnessione **basato su bus** con tutti i segnali di controllo, usando moduli combinatori noti (per es., ADD, MUX, DECOD, …) con ingressi e uscite da *n* bit.

Lo schema generale dell'interconnessione è il seguente:




Restano da determinare le espressioni booleane associate ai segnali di controllo.

c1 = c0 = 0 : deve essere inR0 = daR1 = 1 e tutti gli altri segnali a 0.
c1 = 1, c0 = 0 : deve essere inR1 = 1 e daR0 = 1, se R0 > R2, oppure daR2 = 1, altrimenti; tutti gli altri segnali devono essere a 0.
c1 = 0, c0 = 1 : deve essere inR2 = daR0 =1 e tutti gli altri segnali a 0.

Visto che R0 > R1 si ha se e solo se $c_> = 1$, si ricavano le seguenti espressioni booleane:

$$inR0=\overline{c_0}\,\overline{c_1}$$
$$inR1=\overline{c_0}\,c_1$$
$$inR2=\overline{c_1}\,c_0$$
$$daR0=\overline{c_0}\,c_1\,c_{¿}+c_0\,\overline{c_1}$$
$$daR1=\overline{c_0}\,\overline{c_1}$$
$$daR2=\overline{c_0}\,c_1\,\overline{c_{¿}}$$

SOLUZIONI ESAME di PROGETTAZIONE di SISTEMI DIGITALI

22 gennaio 2013 - Canale AL - prof. Gorla **FILA B**

**Esercizio 1.** *a)* Si converta in base 2 il numero 29,68 espresso in base 10; si usi una rappresentazione in virgola mobile con 10 bit di mantissa e 4 di esponente *(3 punti)*:

Convertiamo separatamente 29 e 0,68.

| | |
|---|---|
| 29:2 | 1 |
| 14:2 | 0 |
| 7:2 | 1 |
| 3:2 | 1 |
| 1:2 | 1 |
| 0 | |

$29_{(10)} = 11101_{(2)}$

Nel convertire 0,68 in binario consideriamo che dei 10 bit di mantissa ne verranno già usati 5 e quindi ne dobbiamo calcolare solo 5.

| | | |
|---|---|---|
| 0,68x2 | 1,36 | 1 |
| 0,36x2 | 0,72 | 0 |
| 0,72x2 | 1,44 | 1 |
| 0,44x2 | 0,88 | 0 |
| 0,88x2 | 1,76 | 1 |

Quindi
$29{,}68_{(10)} \approx 11101{,}10101_{(2)}$
che, normalizzato, e portato nella notazione richiesta è

**<0,1110110101,0101>**

*b)* si sommi il numero così ottenuto con <1,1001101010,1101>, dove l'esponente è nella rappresentazione in complemento a 2 *(3 punti)*:

L'esponente del secondo numero è negativo e quindi minore di quello del primo. Nel secondo numero dovrà essere quindi spostata la virgola a sinistra per ottenere una rappresentazione con esponente uguale al primo. Per calcolare di quanti posti devo spostare la virgola calcolo la differenza tra gli esponenti, ovvero 5 - (-3) = 8.

La mantissa del secondo numero diventa quindi 0,0000000010 (escludendo i bit successivi ai 10 rappresentabili).Essendo i numeri di segno discorde, dobbiamo sottrarre le mantisse.

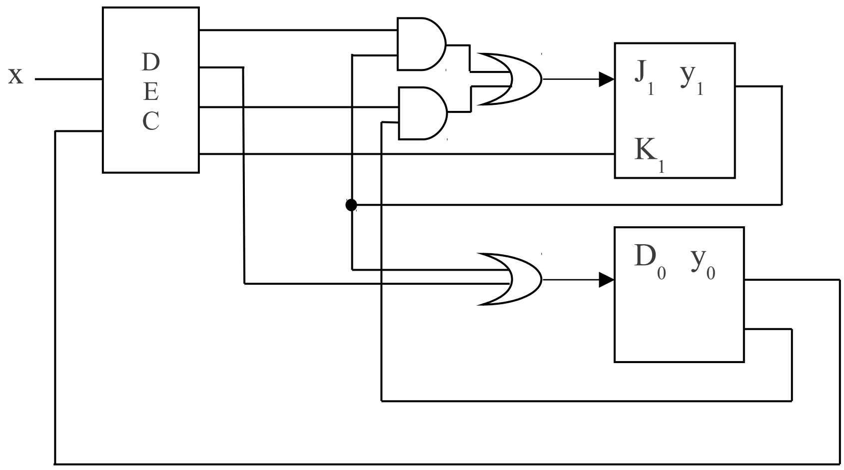
0,1110110101 -
0,0000000010 =

---

0,1110110011

Il risultato è **<0,1110110011,0101>**

**Esercizio 2.** Si consideri la seguente rete sequenziale (senza output):




Se ne effettui l’analisi, fino alla scrittura dell’automa senza output. In particolare:

a)Si scrivano le espressioni booleane associate alle entrate dei FF *(4 punti)*:

$D_0 = y_1 + \overline{x} \cdot y_0$
$J_1 = (\overline{x} \cdot \overline{y_0}) \cdot y_1 + (x \cdot \overline{y_0}) \cdot \overline{y_0} = \overline{x} \cdot \overline{y_0} \cdot y_1 + x \cdot \overline{y_0}$
$K_1 = x \cdot y_0$

b)Si scriva l’espressione di $d_0$ in forma canonica congiuntiva, specificando quali assiomi dell’algebra di Boole si usano *(2 punti)*:

$D_0 = y_1 + \overline{x} \cdot y_0 =$
$= (y_1 + \overline{x}) \cdot (y_1 + y_0) =$ (applicando la proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto)
$= (y_1 + \overline{x} + y_0 \cdot \overline{y_0}) \cdot (y_1 + y_0 + x \cdot \overline{x}) =$ (applicando la proprietà dell'elemento complementare)
$= (\overline{x} + y_0 + y_1) \cdot (\overline{x} + \overline{y_0} + y_1) \cdot (x + y_0 + y_1) \cdot (\overline{x} + y_0 + y_1) =$ (applicando di nuovo la proprietà distributiva)
$= (x + y_0 + y_1) \cdot (\overline{x} + y_0 + y_1) \cdot (\overline{x} + \overline{y_0} + y_1)$ (idempotenza)

Si scriva la forma canonica disgiuntiva dell’espressione ottenuta per $j_1$ *(1 punto)*:

$J_1 = \overline{x} \cdot \overline{y_0} \cdot y_1 + x \cdot \overline{y_0} = \overline{x} \cdot \overline{y_0} \cdot y_1 + x \cdot \overline{y_0} \cdot (y_1 + \overline{y_1}) = \overline{x} \cdot \overline{y_0} \cdot y_1 + x \cdot \overline{y_0} \cdot y_1 + x \cdot \overline{y_0} \cdot \overline{y_1}$

Si scriva la tabella degli stati futuri *(2 punti)*:

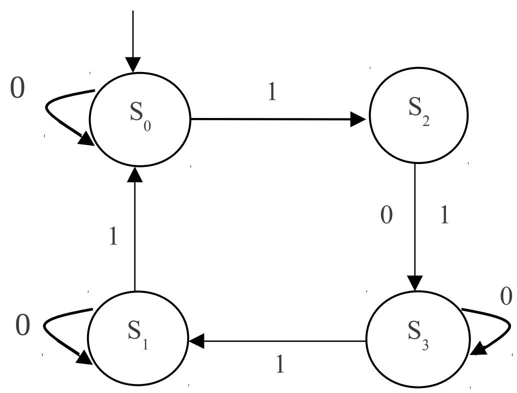
| $Q_1$ | $Q_0$ | x | $J_1$ | $K_1$ | $D_0$ | $Q_1'$ | $Q_0'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Si ricavi dalla tabella l’automa senza output, assumendo che inizialmente entrambi i FF contengano il valore 0 *(1 punto)*:

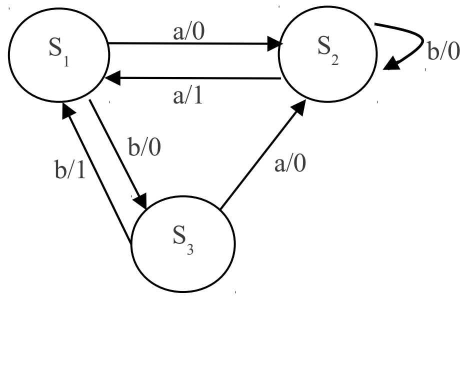
Definiamo gli stati dell'automa in base ai valori di $Q_1$ e $Q_0$.

$S_0$: (0,0)
$S_1$: (0,1)
$S_2$: (1,0)
$S_3$: (1,1)

| **Stato Presente** | **x** | **Stato Futuro** |
|---|---|---|
| $S_0$ | 0 | $S_0$ |
| $S_0$ | 1 | $S_2$ |
| $S_2$ | 0 | $S_3$ |
| $S_2$ | 1 | $S_3$ |
| $S_3$ | 0 | $S_3$ |
| $S_3$ | 1 | $S_1$ |
| $S_1$ | 0 | $S_1$ |
| $S_1$ | 1 | $S_0$ |




**Esercizio 3.** *a)* Dato l'automa in figura, si progetti la rete sequenziale che lo realizza usando un FF di tipo JK e uno di tipo T *(6 punti)*.



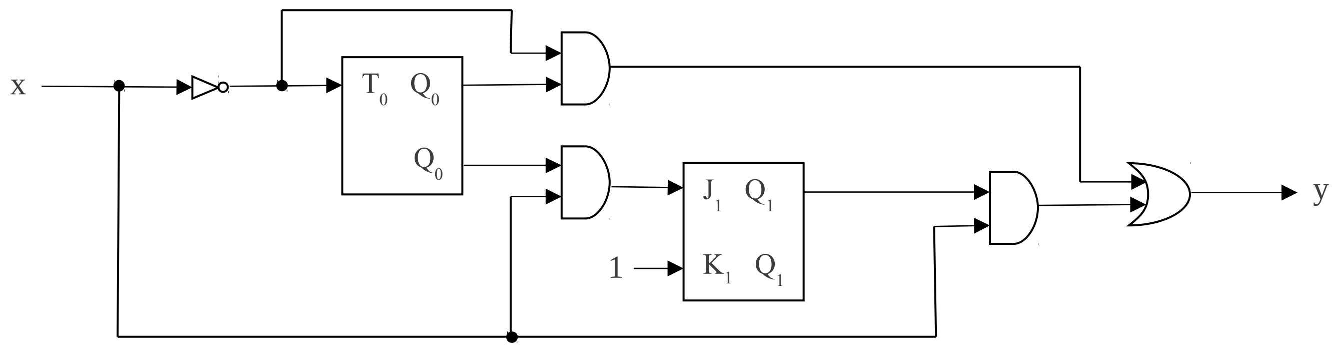

Rappresentiamo i 2 simboli dell'alfabeto di input {a,b} rispettivamente con 0 e 1.

| $Q_1$ | $Q_0$ | x | y | $Q_1'$ | $Q_0'$ | $J_1$ | $K_1$ | $T_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | X | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | X | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | X | 1 |

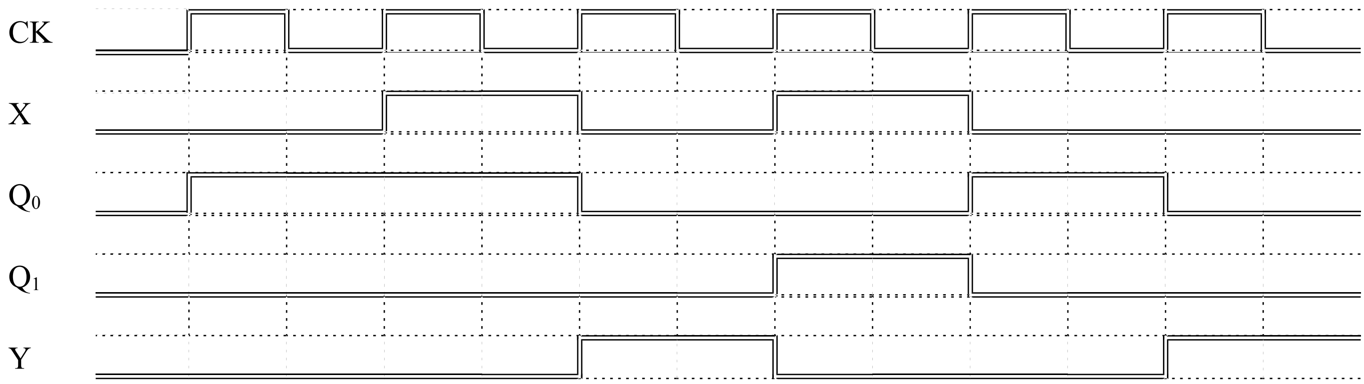
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | X | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | X | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | X | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | X | X | X | X | X | X |
| 1 | 1 | 1 | X | X | X | X | X | X |

Le espressioni SOP minimali sono:

$$y = Q_0 \cdot \overline{x} + Q_1 \cdot x$$
$$J_1 = \overline{Q_0} \cdot x$$
$$K_1 = 1$$
$$T_0 = \overline{x}$$




*b)* Disegnare il diagramma temporale per la sequenza di ingresso **ababaa** a partire dallo stato $S_1$, visualizzando sia i valori memorizzati nei FF che l'output *(2 punti)*:



**Esercizio 4.** *(8 punti)* Si considerino i registri $R_1$, $R_2$, $R_3$ e $R_4$. Si progetti la rete di interconnessione tale che:

- in $R_3$ viene trasferita la somma algebrica tra i registri $R_1$ e $R_2$; il trasferimento è abilitato se $R_1$ e $R_2$ non sono entrambi pari;
- in $R_4$ viene trasferito $R_1$ se $R_4$ è negativo, viene trasferito $R_3$ altrimenti; il trasferimento è abilitato se $R_2 \geq R_3$

Si specifichi lo schema di interconnessione con tutti i segnali di controllo, usando moduli combinatori noti (per es., ADD, MUX, DECOD, …) con ingressi e uscite da *n* bit.

La condizione " $R_1$ e $R_2$ non sono entrambi pari" è verificata quando almeno uno dei bit meno significativi dei due registri è 1 (infatti, un numero è paro se termina con uno 0). Questo è calcolato da una funzione OR ed abilita alla scrittura il registro R3. La scrittura su R4 va abilitata se R3 non è maggiore di R2 e questo si ottiene comparando R3 ed R2 e negando il bit C> (che vale 1 se e solo se R3 > R2). Il valore da copiare in R4 è determinato in base al segno di R4, codificato nel suo bit più significativo. Pertanto, la connessione è la seguente, dove MSB significa "bit più significativo" e LSB significa "bit meno significativo":