Riassunto della lezione del 20/11/2008

Igor Melatti

Soluzione dell'Esonero di Architetture degli Elaboratori I dell'8/11/2006 (Compito A)

Testo 1

Scrivere i numeri decimali $A = 94$ e $B = -29$ nella rappresentazione in complemento a 2. Eseguire la somma e la differenza tra i due valori ottenuti.

Soluzione 1

Conversione per A:

$$\begin{array}{rclcccc}
94 & = & 47 & \cdot & 2 & + & 0 \\
47 & = & 23 & \cdot & 2 & + & 1 \\
23 & = & 11 & \cdot & 2 & + & 1 \\
11 & = & 5 & \cdot & 2 & + & 1 \\
5 & = & 2 & \cdot & 2 & + & 1 \\
2 & = & 1 & \cdot & 2 & + & 0 \\
1 & = & 0 & \cdot & 2 & + & 1
\end{array}$$

Leggendo i resti (ultima colonna) dal basso all'alto si ottiene che $A = 1011110_2$; quindi in complemento a 2 si ha $A = 01011110$.

Conversione per B:

$$\begin{array}{rclcccc}
29 & = & 14 & \cdot & 2 & + & 1 \\
14 & = & 7 & \cdot & 2 & + & 0 \\
7 & = & 3 & \cdot & 2 & + & 1 \\
3 & = & 1 & \cdot & 2 & + & 1 \\
1 & = & 0 & \cdot & 2 & + & 1
\end{array}$$

Leggendo i resti dal basso all'alto si ottiene che $-B = 11101_2$; quindi in complemento a 2 si ha $B = 100011$, con i seguenti passaggi:

$$11101 \rightsquigarrow 00010 \rightsquigarrow 00011 \rightsquigarrow 100011$$

$A + B = 01000001$, in quanto:

riporti	1	1	1	1	1	1			
A	0	1	0	1	1	1	1	0	+
B	1	1	1	0	0	0	1	1	=
	0	1	0	0	0	0	0	1	

Per fare la differenza, si nota che $A-B = A+(-B)$, quindi $A-B = 01111011$, in quanto, dato che $-B = 011101$ (come sopra, ma in complemento a 2), si ha:

riporti			1	1	1				
A	0	1	0	1	1	1	1	0	+
B	0	0	0	1	1	1	0	1	=
	0	1	1	1	1	0	1	1	

Notare come, in entrambi gli esempi, il secondo operando della somma sia andato soggetto all'estensione del segno (1 per la somma, dove era $B < 0$, 0 per la differenza, dove era $-B > 0$).

Infine, è da notare che è ***sbagliato*** (come non ho fatto in tempo a far notare a tutti durante la lezione) provare a fare la sottrazione in colonna direttamente (questo perché B è in complemento a 2 e non in modulo e segno).

Testo 2

Rappresentare i numeri decimali $X = 734.3859 \times 10^2$ e $Y = -587866.5 \times 10^{-1}$ in virgola mobile in base 10 (cioè senza fare conversioni di base), ove la tripla ha 8 cifre per la mantissa e 2 per l'esponente. Eseguire la somma $(X + Y)$ e la differenza $(X - Y)$ tra i due numeri e dare il risultato sotto forma di tripla.

Soluzione 2

$X = 734.3859 \times 10^2 = 0.73438590 \times 10^5$, quindi è rappresentato da $\langle 0, 73438590, 05\rangle$.
$Y = -587866.5 \times 10^{-1} = -0.58786650 \times 10^5$, quindi è rappresentato da $\langle 1, 58786650, 05\rangle$.

Dato che hanno già lo stesso esponente, si possono fare le operazioni in colonna direttamente sulle mantisse. Dati i segni di X ed Y, per calcolare $X + Y$ occorre sottrarre le mantisse, per $X - Y$ occorre sommarle. Nel caso della sottrazione, $X > |Y|$ quindi il risultato sarà positivo.
$X + Y = X - (-Y) = X - |Y| = 0.14651940 \times 10^5$, quindi è rappresentato da $\langle 0, 14651940, 05\rangle$.
$X - Y = X + (-Y) = X + |Y| = 1.3222524 \times 10^5 = 0.13222524 \times 10^6$, quindi è rappresentato da $\langle 0, 13222524, 06\rangle$.

Testo 3

Verificare la seguente identità:

$\overline{a}b + abc + \overline{b}\overline{c} = \overline{a}\,\overline{c} + bc + a\overline{b}\overline{c}$

Scrivere l'espressione duale e l'espressione complementare.

Soluzione 3

Per la verifica, uno dei possibili metodi è passare alla forma canonica SOP ad entrambi i lati:

$\overline{a}b\overline{c} + \overline{a}bc + abc + \overline{a}\overline{b}\overline{c} + a\overline{b}\overline{c} = \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}bc + abc + a\overline{b}\overline{c}$

e riordinando:

$\overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}bc + a\overline{b}\overline{c} + abc = \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}bc + a\overline{b}\overline{c} + abc$

Espressione duale:

$(\overline{a} + b)(a + b + c)(\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{c})(b + c)(a + \overline{b} + \overline{c})$

Espressione complementare:

$(a + \overline{b})(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c})(b + c) = (a + c)(\overline{b} + \overline{c})(\overline{a} + b + c)$

Testo 4

Siano dati due valori interi $A = \{a_1, a_0\}$ e $B = \{b_1, b_0\}$, rappresentati ciascuno con due bit nella codifica binaria, si vuol calcolare il numero $Y = \{y_3, y_2, y_1, y_0\}$, rappresentato nella codifica in complemento a due con 4 bit. Il valore Y è ottenuto come risultato della funzione:

$$Y = F(A, B) = 3A - 2B + 3$$

NOTA: nei casi in cui la funzione produce un valore fuori dal range di rappresentazione di Y, si consideri il valore Y come non definito (don't care).
NOTA: i don't care si usano nelle ROM e MUX fissando di volta in volta il valore che è più utile.

Si progetti il circuito combinatorio che calcola Y nei tre modi:

- con una ROM
- con una PLA
- con NOT e multiplexers 8-a-1

Soluzione 4

Occorre sintetizzare una rete combinatoria con 4 ingressi $a_1a_0b_1b_0$ e 4 uscite $y_3y_2y_1y_0$. Queste 4 uscite vanno lette come il valore in complemento a 2 di Y quando A e B hanno come rappresentazione binaria (in modulo e segno) quella indicata dai bit a_1a_0 e b_1b_0, rispettivamente. Dato che con il complemento a 2 su 4 bit si può rappresentare l'intervallo $[-2^{4-1}, 2^{4-1} - 1] = [-8, 7]$, ai valori di Y al di fuori di tale intervallo corrispondono dei δ per $y_3y_2y_1y_0$.

a_1	a_0	b_1	b_0	A	B	$Y = 3A - 2B + 3$			y_3	y_2	y_1	y_0
0	0	0	0	0	0	$3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 3$	$=$	3	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	$3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 3$	$=$	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	2	$3 \cdot 0 - 2 \cdot 2 + 3$	$=$	-1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	3	$3 \cdot 0 - 2 \cdot 3 + 3$	$=$	-3	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	$3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 3$	$=$	6	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	$3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 3$	$=$	4	0	1	0	0
0	1	1	0	1	2	$3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3$	$=$	2	0	0	1	0
0	1	1	1	1	3	$3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 3$	$=$	0	0	0	0	0
1	0	0	0	2	0	$3 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + 3$	$=$	9	δ	δ	δ	δ
1	0	0	1	2	1	$3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 3$	$=$	7	0	1	1	1
1	0	1	0	2	2	$3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 3$	$=$	5	0	1	0	1
1	0	1	1	2	3	$3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 3$	$=$	3	0	0	1	1
1	1	0	0	3	0	$3 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + 3$	$=$	12	δ	δ	δ	δ
1	1	0	1	3	1	$3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 3$	$=$	10	δ	δ	δ	δ
1	1	1	0	3	2	$3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + 3$	$=$	8	δ	δ	δ	δ
1	1	1	1	3	3	$3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 + 3$	$=$	6	0	1	1	0

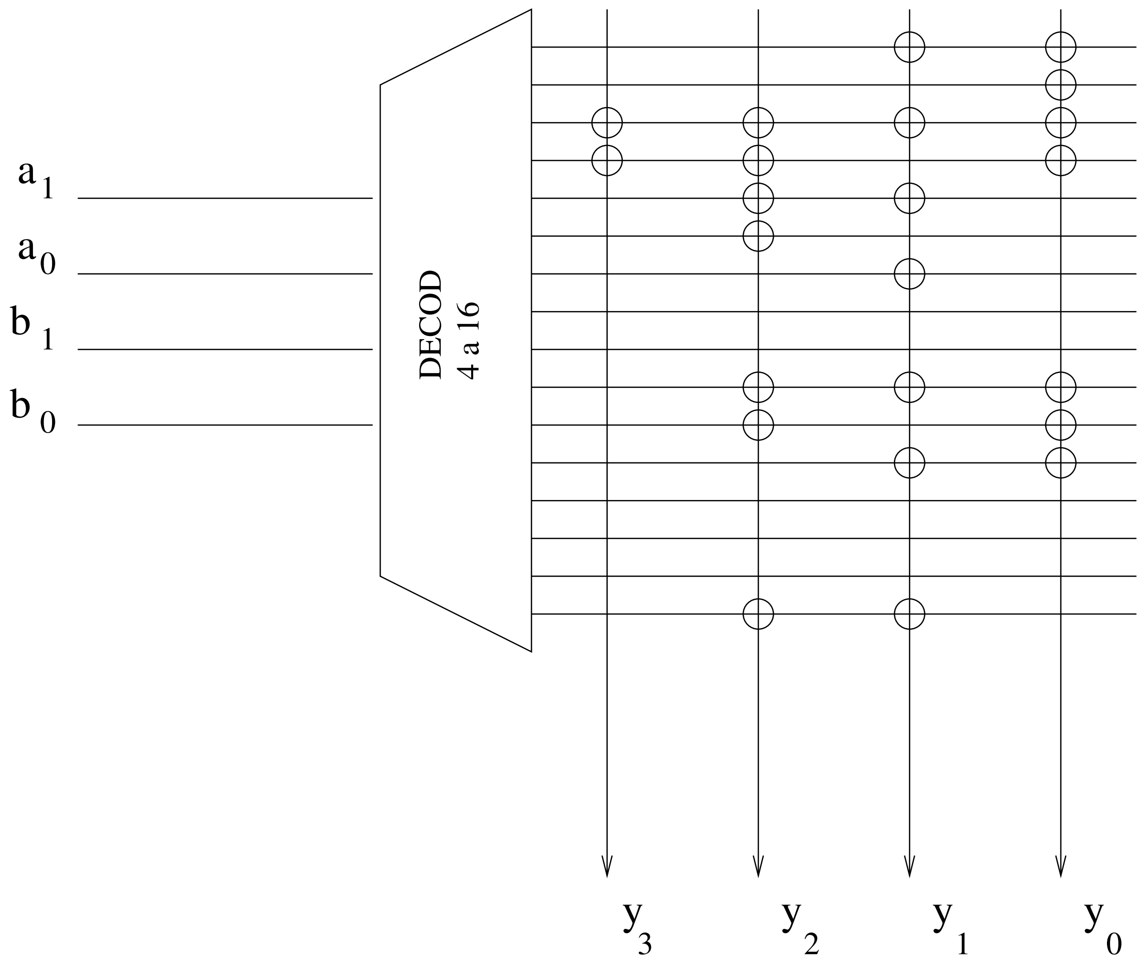

Figure 1: Soluzione tramite ROM

$b_1b_0 \backslash a_1a_0$	00	01	11	10
00			δ	δ
01			δ	
11	1			
10	1		δ	

Figure 2: K-mappa per y_3

Soluzione tramite ROM: vedere figura 1.

Soluzione tramite PLA: occorre prima fare le K-mappe per y_3, y_2, y_1, y_0 (vedere figure da 2 a 5), dalle quali si ricava:

$$y_3 = \overline{a_1}\,\overline{a_0}b_1$$

$$y_2 = \overline{a_1}\,\overline{a_0}b_1 + a_0\overline{b_1} + a_1\overline{b_1} + a_1a_0 + a_1\overline{b_0}$$

$$y_1 = a_1b_0 + \overline{a_1}\overline{b_0}$$

$$y_0 = \overline{a_0}$$

Dopodiché, la PLA è quella riportata in figura 6.

Per la soluzione tramite multiplexer 8-a-1, occorre farne 4, uno per ogni y_i. Avendo 8 linee di ingresso, tali multiplexer avranno $\log_2 8 = 3$ linee di selezione. Tali linee di selezione vengono usate, come usuale, per portare 3 delle 4 variabili in ingresso, diciamo $a_1a_0b_1$. A questo punto, si procede riarrangiando le tabelle di verità come segue.

Per y_3:

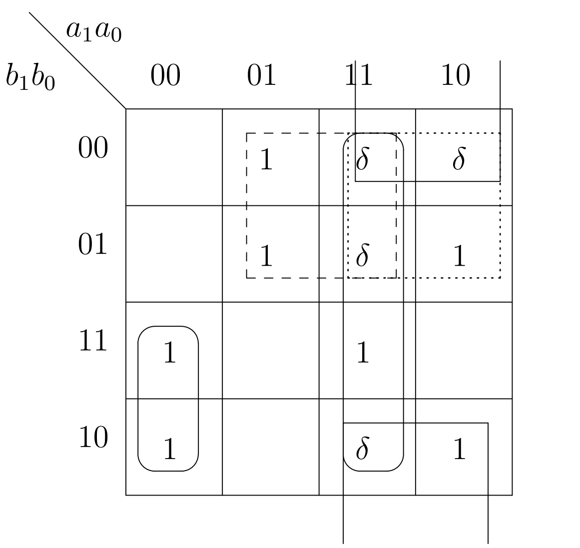

Figure 3: K-mappa per y_2

b_1b_0 \ a_1a_0	00	01	11	10
00	1	1	δ	δ
01			δ	1
11			1	1
10	1	1	δ	

Figure 4: K-mappa per y_1

b_1b_0 \ a_1a_0	00	01	11	10
00	1		δ	δ
01	1		δ	1
11	1			1
10	1		δ	1

Figure 5: K-mappa per y_0

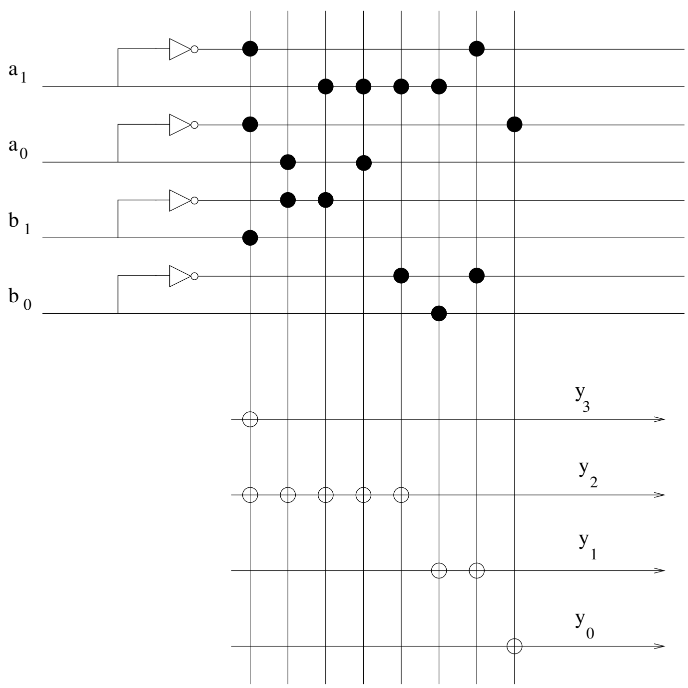

Figure 6: Soluzione tramite PLA

		$a_1a_0b_1$							
		000	001	010	011	100	101	110	111
b_0	0	0	1	0	0	δ	0	δ	δ
	1	0	1	0	0	0	0	δ	0
		$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
		0	1	0	0	0	0	0	0

Per y_2:

		$a_1a_0b_1$							
		000	001	010	011	100	101	110	111
b_0	0	0	1	1	0	δ	1	δ	δ
	1	0	1	1	0	1	0	δ	1
		$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
		0	1	1	0	1	$\overline{b_0}$	0	1

Per y_1:

		$a_1a_0b_1$							
		000	001	010	011	100	101	110	111
b_0	0	1	1	1	1	δ	0	δ	δ
	1	0	0	0	0	1	1	δ	1
		$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
		$\overline{b_0}$	$\overline{b_0}$	$\overline{b_0}$	$\overline{b_0}$	1	b_0	0	1

Per y_0:

		$a_1a_0b_1$							
		000	001	010	011	100	101	110	111
b_0	0	1	1	0	0	δ	1	δ	δ
	1	1	1	0	0	1	1	δ	0
		$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
		1	1	0	0	1	1	0	0

Da queste tabelle si possono ricavare i MUX per gli y_i, riportati nelle figure da 7 a 10.

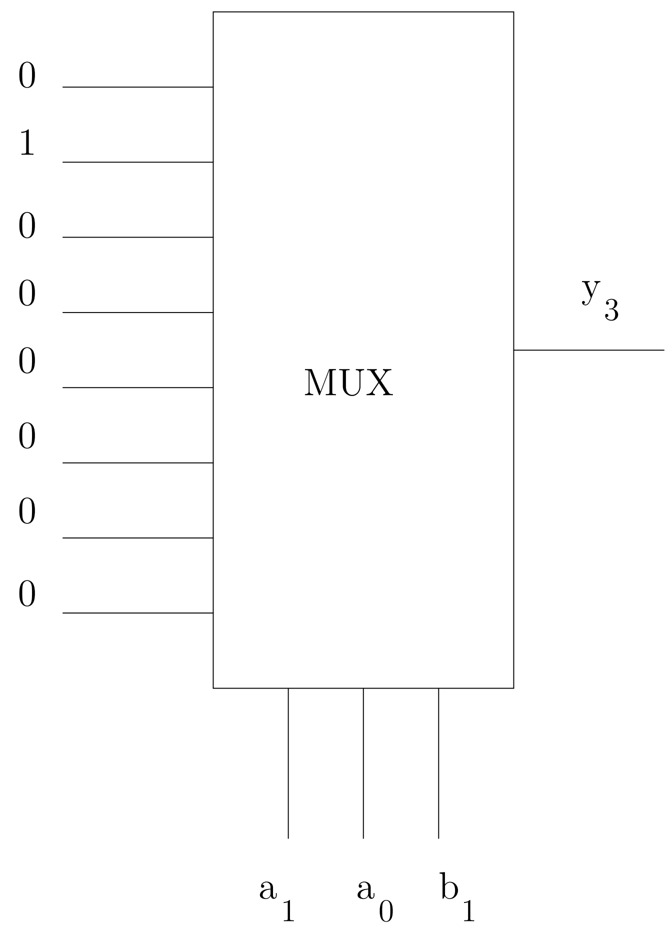

Figure 7: Multiplexer per y_3

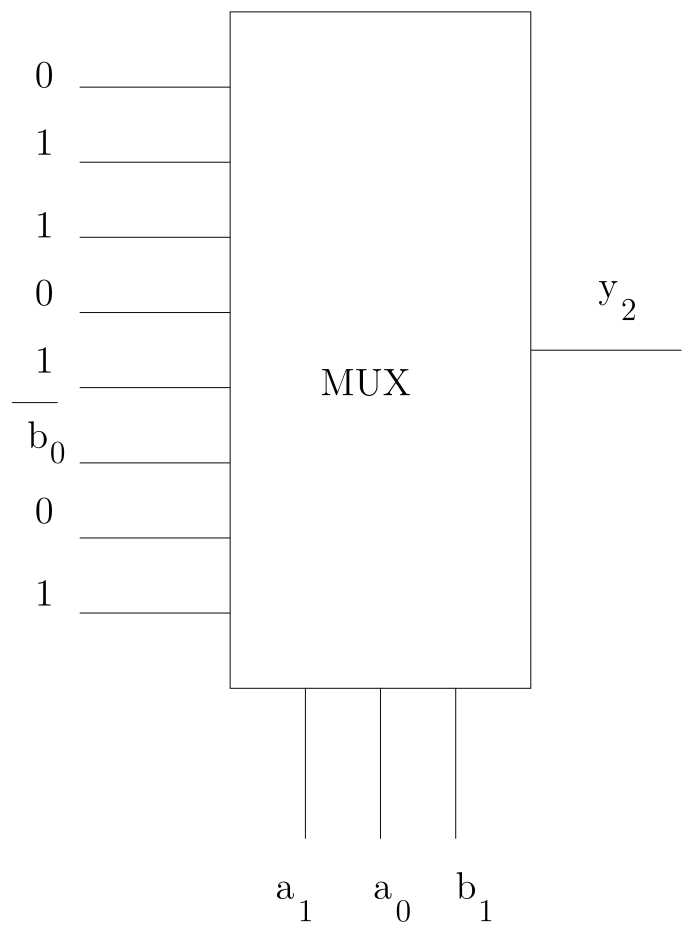

Figure 8: Multiplexer per y_2

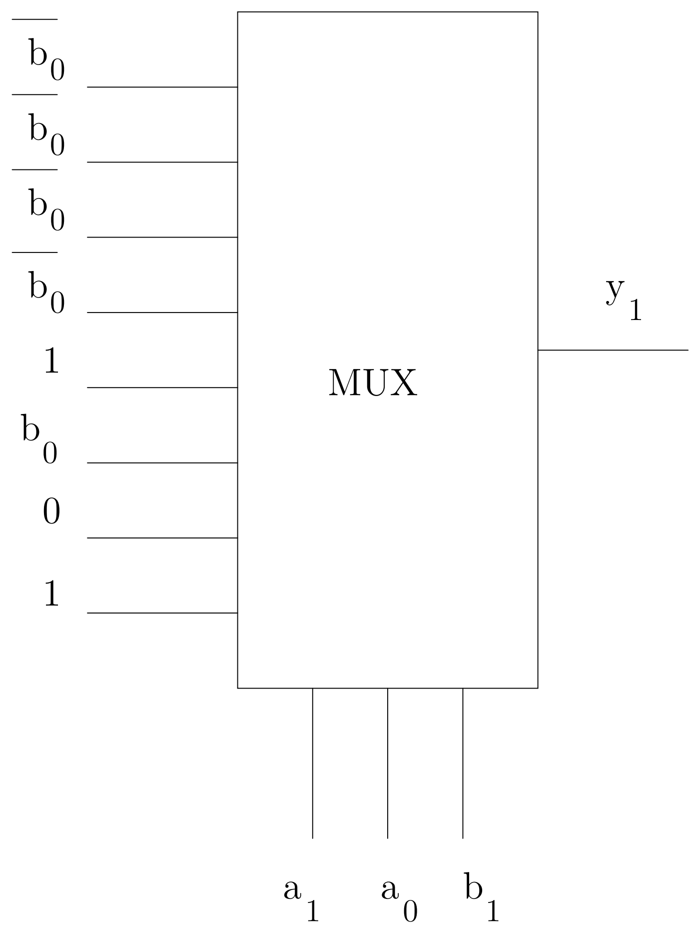

Figure 9: Multiplexer per y_1

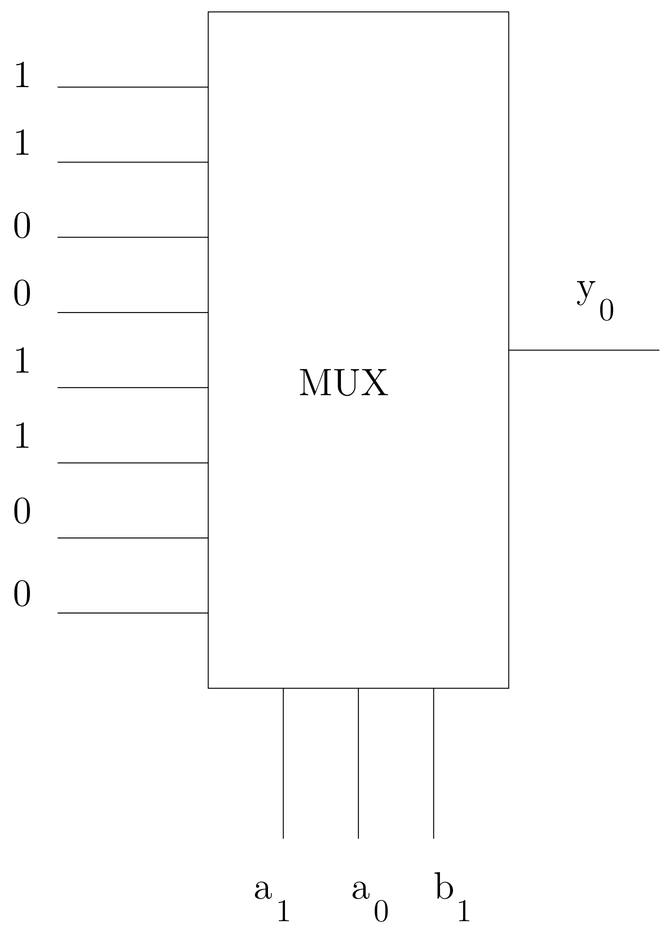

Figure 10: Multiplexer per y_0