APPUNTI PER IL CORSO DI ALGORITMI PER LA VISUALIZZAZIONE

Tiziana Calamoneri A.A. 2007/2008

PREFAZIONE

Questi appunti non possono – almeno per ora - considerarsi una dispensa completa del corso di Algoritmi per la Visualizzazione, in quanto incompleti. Tuttavia essi si prefiggono l'obiettivo di percorrere gli argomenti trattati durante il corso e congiungerli tramite un filo logico. Quindi, non possono essere utilizzati come unica fonte per studiare, ma come uno strumento – sperabilmente utile – per indirizzare verso i giusti riferimenti bibliografici (libri, articoli, ecc.).

La maggior parte di questi appunti sono ispirati ai due testi di riferimento per il corso, [Dal99] e [KW98]; tuttavia, per molti argomenti si è attinto direttamente agli articoli originali.

Una parte di questi appunti sono la rielaborazione del lavoro di alcuni studenti del corso di Algoritmi per la Visualizzazione degli A.A. 2002/03 e 2003/04, in particolare di: Luca Angeletti, Toni Battistoni, Francesco Colonnese, Gabor Friedrich, Paolo Giancontieri, Silvio Lattanzi, Alessio Maculani, Loretta Ilaria Mancini, Michele Morville, Daniele Olivotti, Andrea Pancotti, Sergio Panico, Alessia Pudico, Andrea Rosati, Alessandro Torelli, Cristiano Trani.

Tutto ciò che è scritto in verde è ancora da scrivere o da aggiornare, e alcuni argomenti meritano di essere meglio approfonditi. Pertanto, tutti gli studenti che leggano questi appunti sono invitati a collaborare ad una stesura migliore e più ampia con dei contributi, e sono comunque pregati di contattare T. Calamoneri per qualunque errore, inesattezza o nota. In questo modo, il loro contributo non solo sarà utile a loro stessi, che comprenderanno meglio le tematiche del corso, ma anche ai loro colleghi che seguiranno il corso nei prossimi anni.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[Dal99] G. Di Battista, P. Eades, R. Tamassia, I.G. Tollis*: Graph Drawing – Algorithms for the visualization of graphs*, Prentice Hall, 1999.

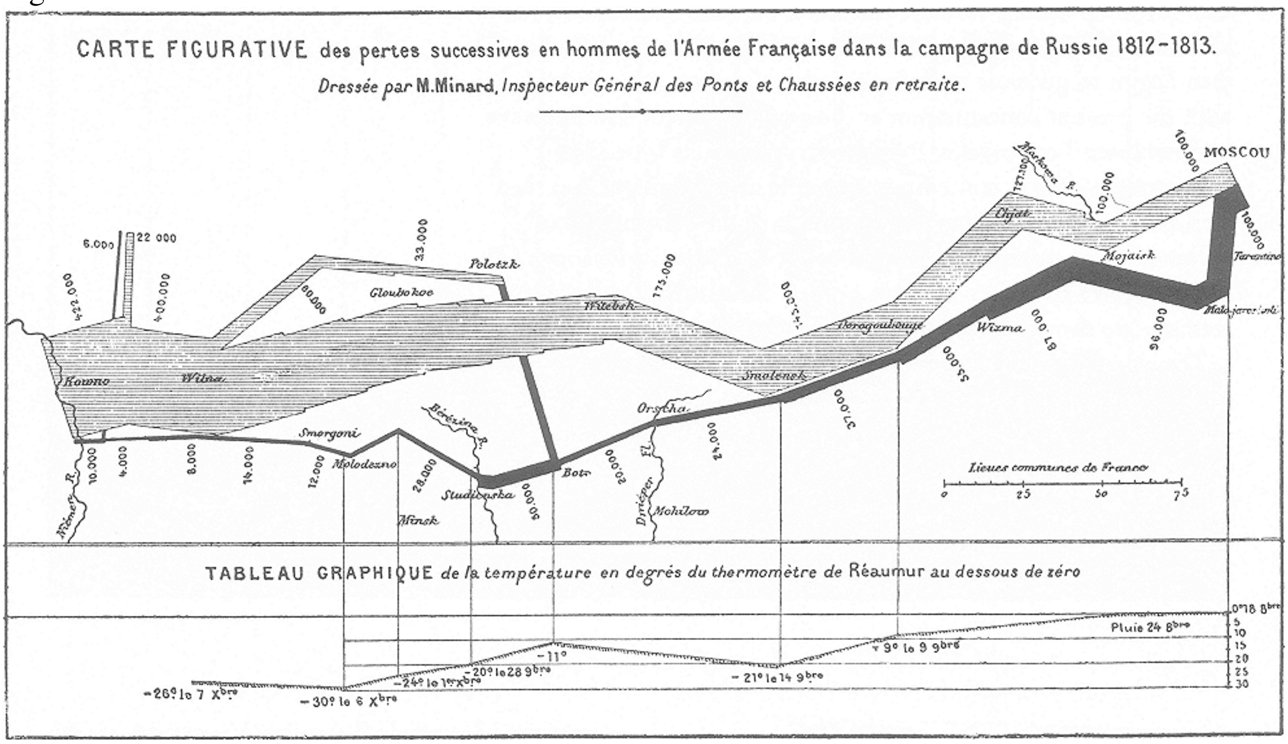
[KW98] M. Kaufmann, D. Wagner (Eds.): *Drawing Graphs – Methods and Models*. Lecture Notes in Computer Science 2025, Springer 1998.

1. BREVE STORIA DELLA VISUALIZZAZIONE DEGLI OGGETTI NEI SECOLI

Riferimenti: [C04] pp 8-10,[Kal01] tutto, [KW01] pp 1-17.
Per approfondire: [C04] pp 1-26.

La visualizzazione di oggetti ha lo scopo di trasmettere all'osservatore un messaggio preciso in modo rapido ed immediato. Un esempio classico che dimostri questo concetto è rappresentato dalla narrazione della storia della disfatta dell'esercito napoleonico nel 1812. I libri di storia raccontano l'accaduto con dovizia di particolari; Charles Joseph Minard (1781-1870) descrisse l'evento tramite un grafico (vedi figura 1.1): gli assi rappresentano la longitudine e la latitudine, rispettivamente, quindi l'andamento della striscia rappresenta la direzione intrapresa dall'esercito di Napoleone, la dimensione dell'esercito è rappresentato dalla larghezza della striscia, partendo dal confine russo-polacco con 422000 uomini. Recentemente questo grafico è stato ridisegnato, usando più o meno la stessa tecnica di Minard, ma tentando di dare ulteriori informazioni. Poiché il calo repentino della temperatura fu uno dei fattori principali che influì durante la ritirata, questa versione del grafico rappresenta questo evento tramite l'utilizzo del colore (vedi figura 1.2). Infine, le battaglie sono rappresentate da rombi.

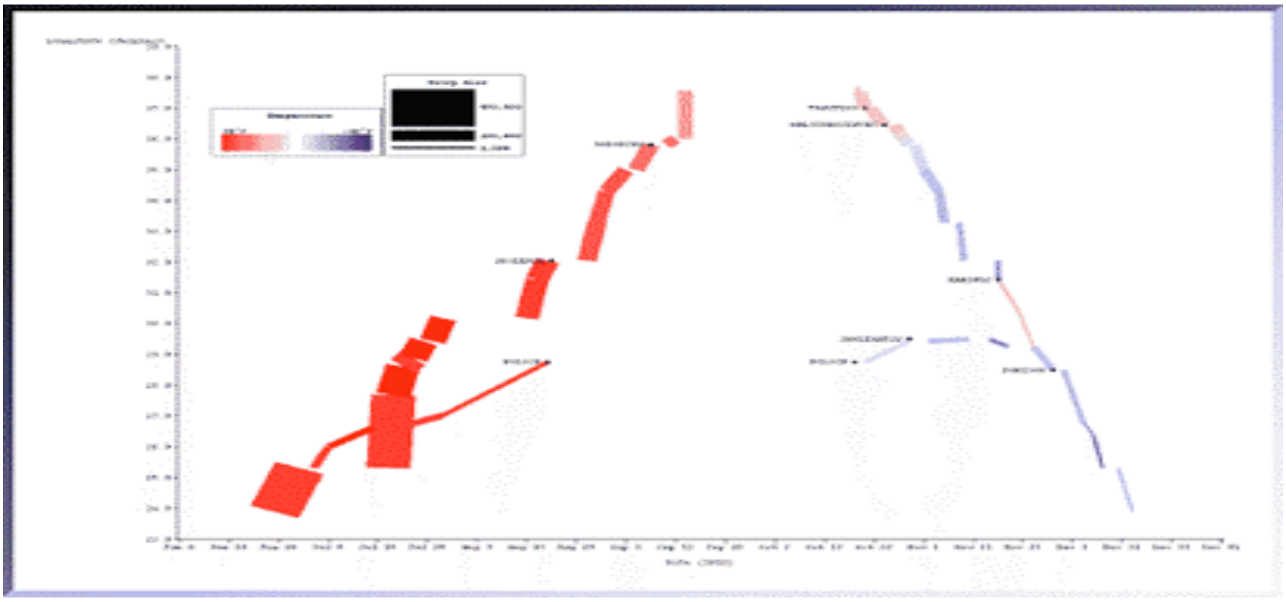
Figura 1.1.



Questo esempio ci permette di comprendere come la visualizzazione sia spesso uno strumento potente ed utile per trasmettere un concetto anche complesso.

Nel seguito verrà brevemente ripercorsa la storia della visualizzazione e del disegno di grafi nei secoli. La ragione della focalizzazione sui grafi è abbastanza semplice: moltissime situazioni o oggetti della vita reale possono essere rappresentati da grafi (mappe, reti, percorsi, …). Nel tracciare questo percorso storico, verranno evidenziati gli argomenti affrontati nel corso, essendo essi problemi importanti che hanno radici profonde.

Figura 1.2.



Sebbene i disegni geometrici di vario tipo siano stati largamente usati nei secoli, il disegno di oggetti astratti che possono essere considerati grafi è qualcosa di relativamente recente, ed ha raggiunto una certa diffusione solo negli ultimi 150 anni.

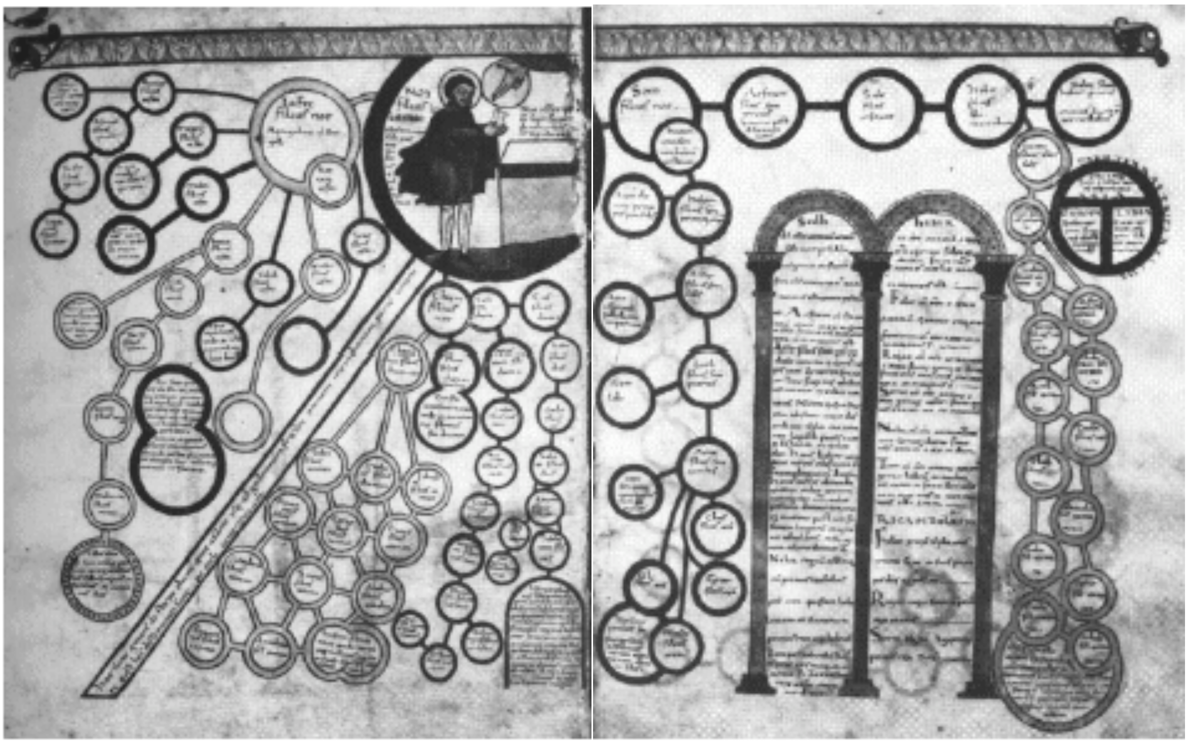
Le prime forme di disegno di grafi riguardano probabilmente il gioco del filetto, in cui la scacchiera descrive esplicitamente un grafo (v. Fig. 1.3). I primi esempi di queste rappresentazioni, secondo alcuni studiosi dei primi del '900, risalgono all'antico Egitto, ma non abbiamo reperti che lo dimostrino. I primi esempi esistenti risalgono invece al "Libro dei Giochi" del XIII secolo, scritto sotto la direzione di Alfonso X (1221-1284), re di Castiglia e di Leon.

Figura 1.3.

Altri esempi noti di antico disegno di grafi sono rappresentati dagli alberi genealogici, che decoravano le sale delle ville patrizie dell'antica Roma. Tali raffigurazioni vengono descritte da Plinio il Vecchio e da Seneca, ma nessun esempio è sopravvissuto fino a noi. I più antichi disegni tramandatici risalgono al Medio Evo. Ad esempio, in Fig. 1.4, è raffigurata la discendenza di Noè, e risale all'XI secolo. In questo corso verrà affrontato piuttosto approfonditamente il tema del <u>disegno di strutture ad albero</u>.

In effetti, osservando Fig. 1.4, si può osservare che la struttura rappresentata non è un albero, e questo è indice di poca chiarezza – da parte dell'autore - tra la rappresentazione grafica e il suo significato, di cui pure verrà discusso. Inoltre, si noti che il disegno è diviso su due pagine, poiché è troppo grande per entrare in un solo foglio.

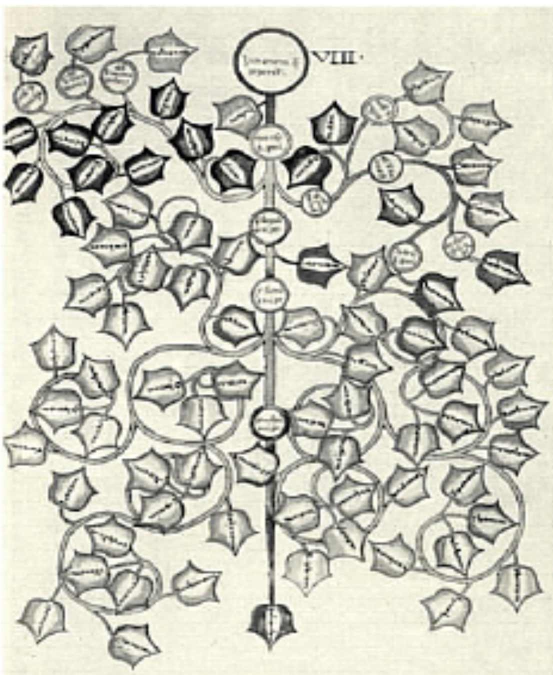
Figura 1.4.



Durante il corso verranno studiate le tematiche legate alla rappresentazione di grandi grafi, la cui rappresentazione grafica, cioè, non entra sullo schermo o sulla pagina da stampare.

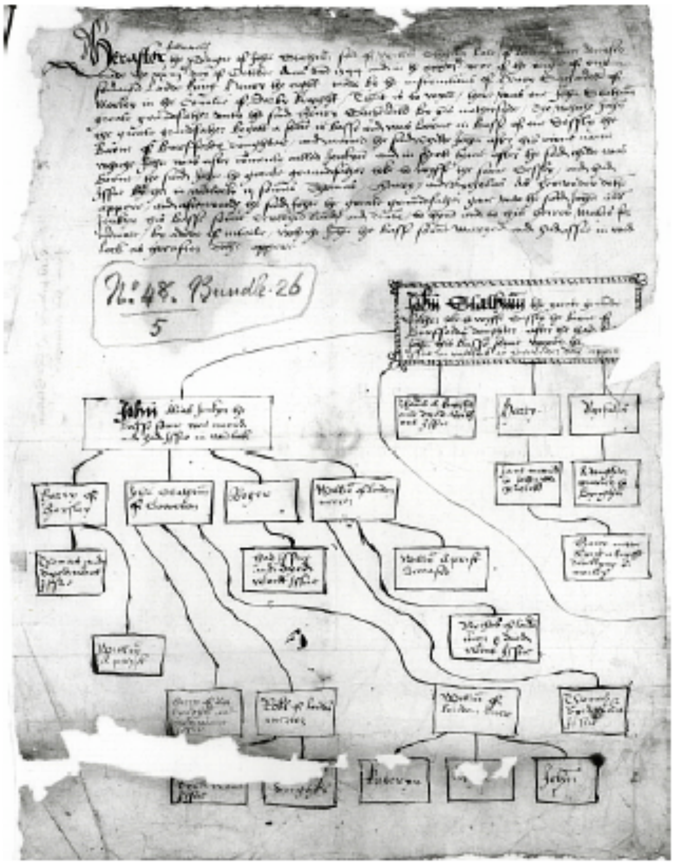
Oltre alla raffigurazione delle dinastie ispirate ai testi sacri, nel Medioevo erano piuttosto diffuse le genealogie delle famiglie nobiliari (a destra di Fig. 1.5 è rappresentato l'albero genealogico della dinastia sassone).

Figura 1.5.



Gli alberi genealogici non riguardano solo personaggi religiosi e nobili: nelle Fig. 1.6 e 1.7 sono mostrati altri due alberi genealogici. Quello in Fig. 1.6 è inusuale, essendo stato ritrovato all'interno di documentazione legale, e quindi non fatto per la sua estetica, ma per il suo significato: è stato esibito in un tribunale al tempo della regina Elisabetta I per mostrare la famiglia di appartenenza di un certo John Stalham. Gli uffici inglesi possiedono diversi documenti simili di età pre-elisabettiana. Questo utilizzo sembra indicare che le persone colte capissero il significato di tali disegni e li usassero frequentemente a partire dal XV secolo.

Figura 1.6.



Un albero genealogico di epoca successiva è quello mostrato in figura 1.7: esso mostra la genealogia di una certa famiglia Mandelli di Firenze, e rappresenta uno dei primi e più chiari esempi di archi curvilinei. Si osservi che il disegno curvilineo ha principalmente funzioni estetiche ma rende più difficoltosa la lettura del disegno. Durante il corso verrà presentato un tipo di disegno che si contrappone a quello curvilineo, e cioè il disegno rettilineo.

Un'altra forma di albero che appare frequentemente nella letteratura medioevale è quella utilizzata per rappresentare categorie e gerarchie di vario tipo. Il disegno, risalente al XIV secolo, mostrato nella parte sinistra di figura 1.8 raffigura le virtù cardinali e teologali, e le loro sottovirtù.

Il disegno, meno rifinito, nella parte destra della stessa figura risale anch'esso al XIV secolo e mostra le varie categorie di vizi. Si osservi come il significato del disegno emerga prepotentemente dalla rappresentazione: le virtù sono una cosa positiva, e vengono perciò rappresentate in modo ordinato e simmetrico, mentre i vizi, indice di disordine, vengono categorizzati in un disegno brutto e assolutamente privo di simmetrie. Durante il corso accenneremo brevemente alla rappresentazione di gerarchie.

Figura 1.7.

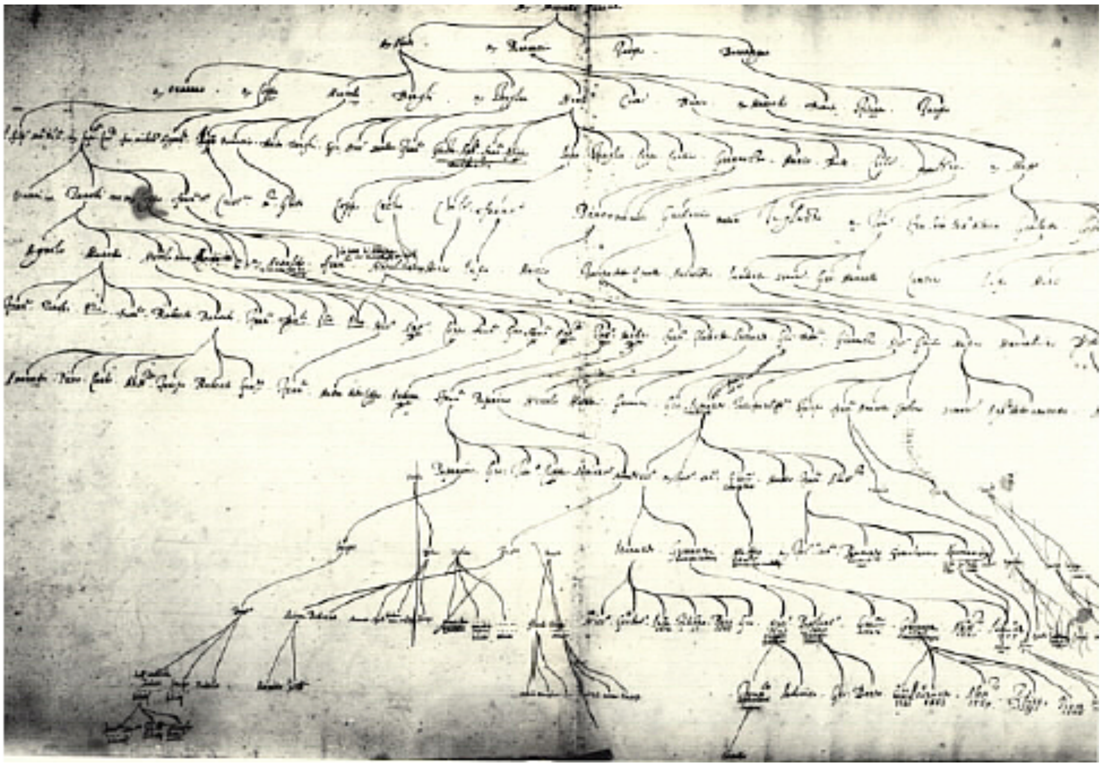
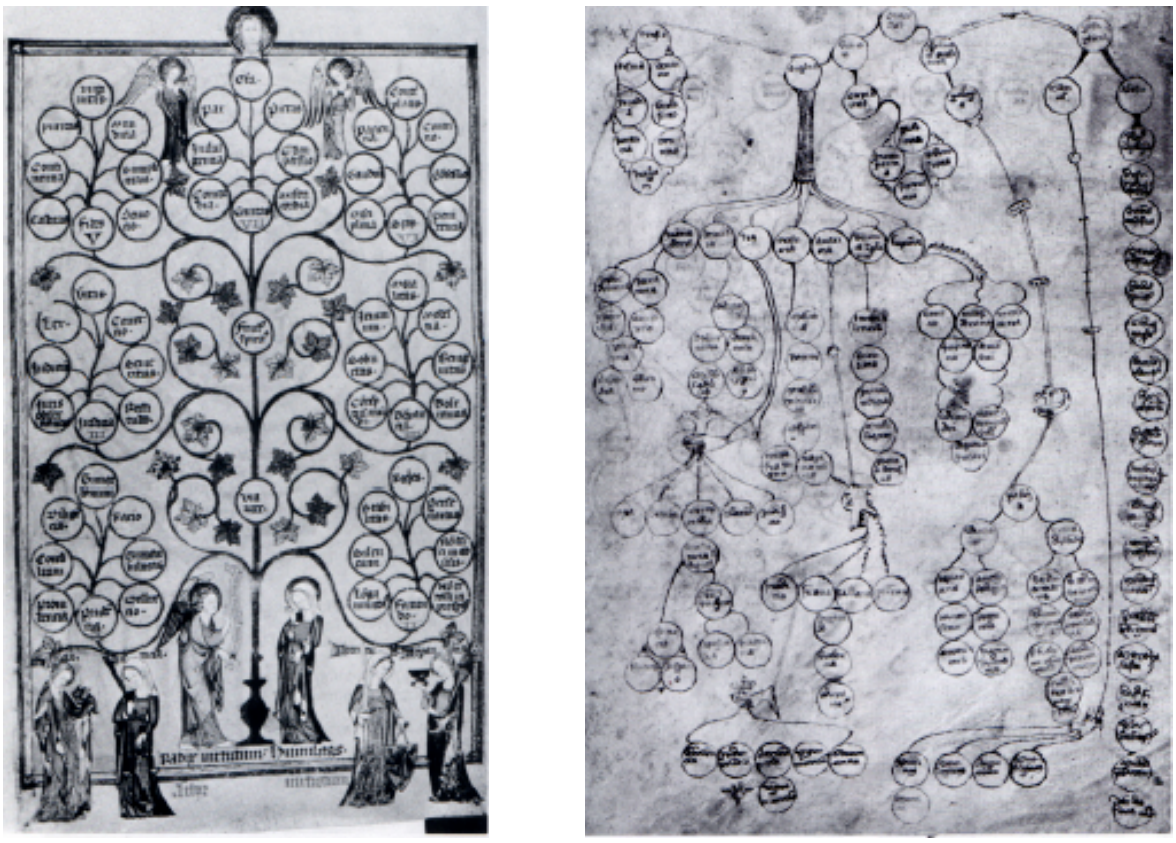
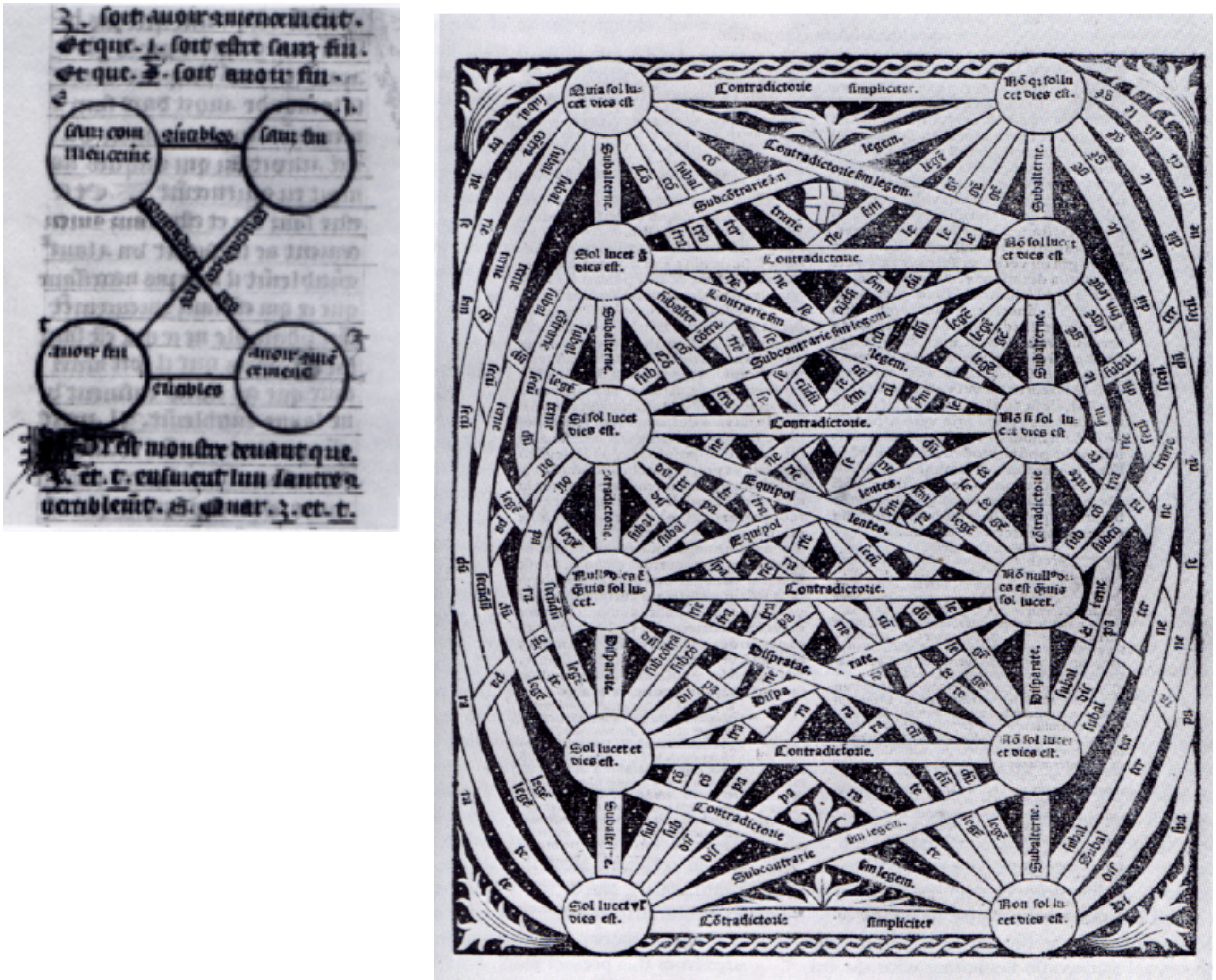


Figura 1.8.



Anche i grafi, oltre agli alberi, vengono rappresentati in età medioevale, a rappresentare e visualizzare delle informazioni astratte: i quadrati delle opposizioni erano degli strumenti pedagogici usati per insegnare la logica in generale, e le proposizioni e i sillogismi in particolare. Essi venivano disegnati per semplificare la memorizzazione e il richiamo alla memoria delle nozioni da parte degli studenti, e quindi non contenevano informazioni complete. La figura 1.9, parte sinistra, è un esempio dovuto ad un matematico e filosofo francese del XIV secolo, tal Nicole Oresme, e rappresenta un argomento di base della filosofia naturale aristotelica. Una rappresentazione più complessa (mostrata in figura 1.9, parte destra) risale al XVI secolo, è dovuta ad uno studente spagnolo, e raffigura un trattato di Pietro di Spagna, poi papa Giovanni XXI, del XIII secolo.

Figura 1.9.

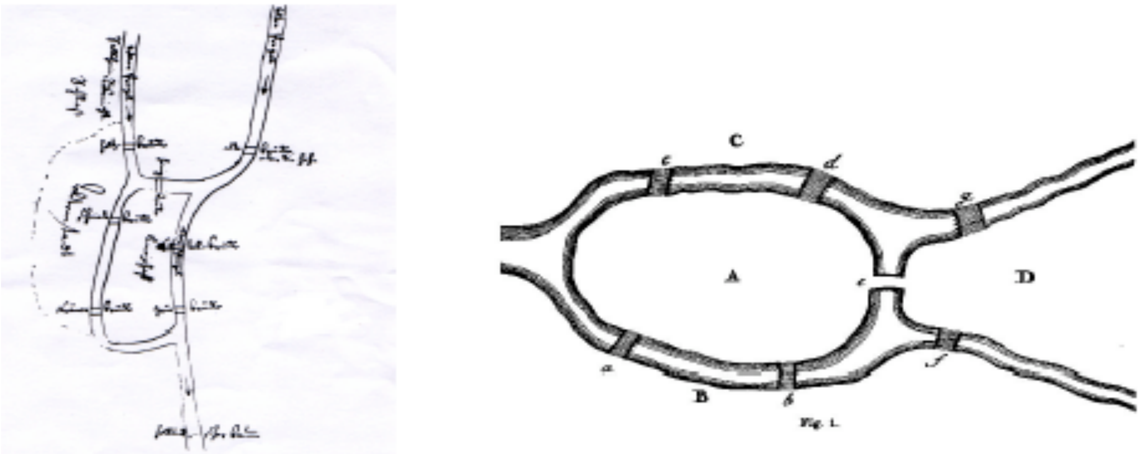


Si osservi che l'enorme numero di incroci rende di lettura piuttosto difficile la visualizzazione; durante il corso si tratterà del problema della <u>minimizzazione del numero di incroci</u>, così come dell'ottimizzazione di altre funzioni importanti per la leggibilità del disegno.

Sebbene utilizzati dapprima per illustrare argomenti di logica, l'uso dei quadrati delle opposizioni venne poi esteso ad altri campi nel corso del Medioevo.

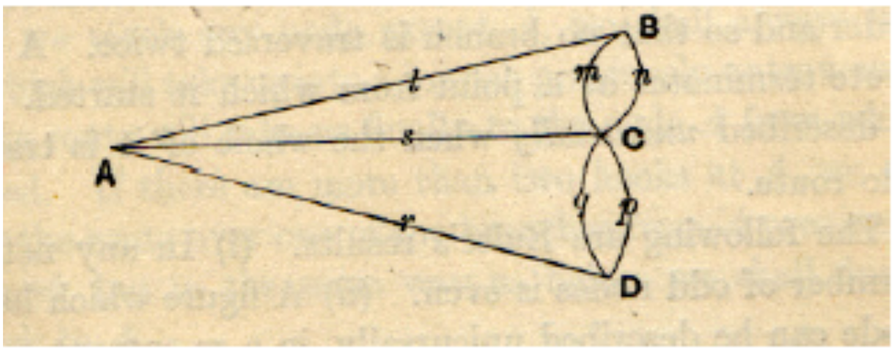
Ci si potrebbe aspettare che il passaggio dalla vecchia alla moderna teoria dei grafi, ad opera del famoso articolo di Eulero del 1736 [E36] sul problema dei ponti di Königsberg segni anche il passaggio al moderno disegno dei grafi. Ma non è così. Nel suo articolo, Eulero risolve il suo problema utilizzando la nozione astratta di grafo, come insieme di nodi e di archi: passando dallo specifico problema dei ponti di Königsberg al problema generale su qualunque grafo egli pone le basi della teoria dei grafi, ma non utilizza mai la visualizzazione dei grafi per spiegare i suoi risultati: nel suo lavoro, gli unici disegni rappresentano la mappa di Königsberg (figura 1.10). Una spiegazione a questa assenza di interesse per la visualizzazione di grafi può essere trovata nel primo paragrafo del suo articolo, in cui Eulero richiama la visione di Leibnitz di un nuovo tipo di geometria senza misure o grandezze. In effetti, Leibnitz sottolinea l'utilità di una nuova caratteristica, completamente diversa dall'algebra, che trae molto vantaggio da una rappresentazione mentale molto naturale, ma *senza figure*. Eulero ha familiarità con il pensiero di Leibnitz, il quale ribadisce che ne' figure ne' modelli dovrebbero legare l'immaginazione. Eulero è dunque un convinto oppositore della visualizzazione dei grafi per descrivere o risolvere problemi di teoria dei grafi.

Figura 1.10.



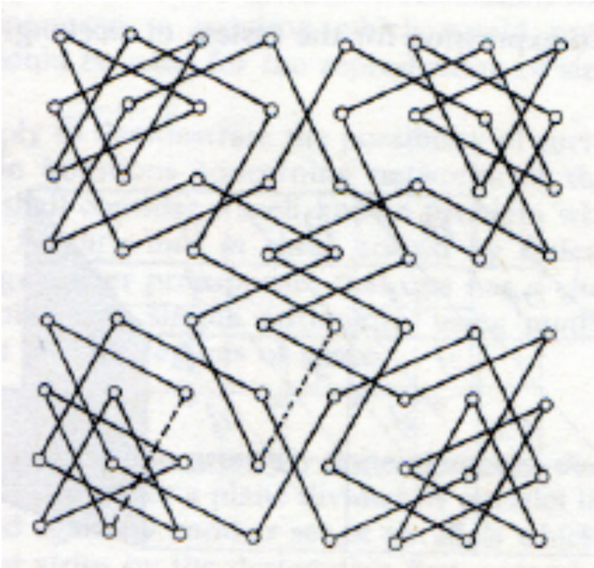
Dunque, probabilmente, è non prima di 150 anni fa, in cui W.W. Rouse Ball (1850-1925) raffigura il primo disegno di grafo astratto, che si può far risalire la nascita del disegno di grafi. Ball rappresenta il problema dei ponti di Königsberg (figura 1.11), e il suo disegno appare nel suo libro sugli svaghi matematici [B92].

Figura 1.11.



Un altro esempio di mancato uso della visualizzazione appare in un altro articolo di Eulero del 1759 [E59] su un altro gioco matematico, il Tour del Cavallo. Questo problema consiste nel determinare una sequenza di mosse di un cavallo su una scacchiera così che possa passare una ed una sola volta per tutte le caselle e tornare al punto di partenza. Dodici anni dopo, nel 1771, Vandermonte chiarisce il problema con l'uso di un disegno (figura 1.12). Egli così descrive la sua rappresentazione, dimostrando di non pensare al grafo che ne scaturisce: "se uno suppone che un chiodo sia fissato al centro di ogni casella, il problema si riduce a determinare un cammino usando un filo che si avvolga intorno ad ogni chiodo e che segua la regola imposta". E' sorprendente rendersi conto che egli non pensa minimamente ad un eventuale grafo.

Figura 1.12.



Fin ora sono stati descritti utilizzi di disegni di grafi come la rappresentazione di alberi genealogici e di rompicapi matematici, che è un po' poco per dare un senso alla nascita di un'intera area di ricerca. In realtà, il ricorso alla visualizzaione, dal tardo XVIII secolo in poi, diventa sempre più frequente. Infatti, tra la fine del XVIII secolo e l'inizio del XIX secolo, il disegno di grafi comincia ad apparire in un sempre maggior numero di contesti, ed in matematica sempre più articoli vengono illustrati tramite disegni. Alcuni esempi:

- J.B. Listing, nel suo trattato di topologia del 1847 [L47], dedica una sezione al tracciamento di cammini nei grafi ed include il noto disegno di figura 1.13 che può essere tracciato senza sollevare mai la penna dal foglio;
- W.R. Hamilton realizza nel 1857 un gioco basato su un'algebra non commutativa detto Calcolo Icosiano. La tavola di gioco è il disegno di un grafo (figura 1.14), su cui si possono realizzare diversi giochi;
- A. Cayley, nel 1857, scrive il suo lavoro pioneristico sugli alberi, aiutandosi pesantemente con i disegni (figura 1.15).

Figura 1.13.

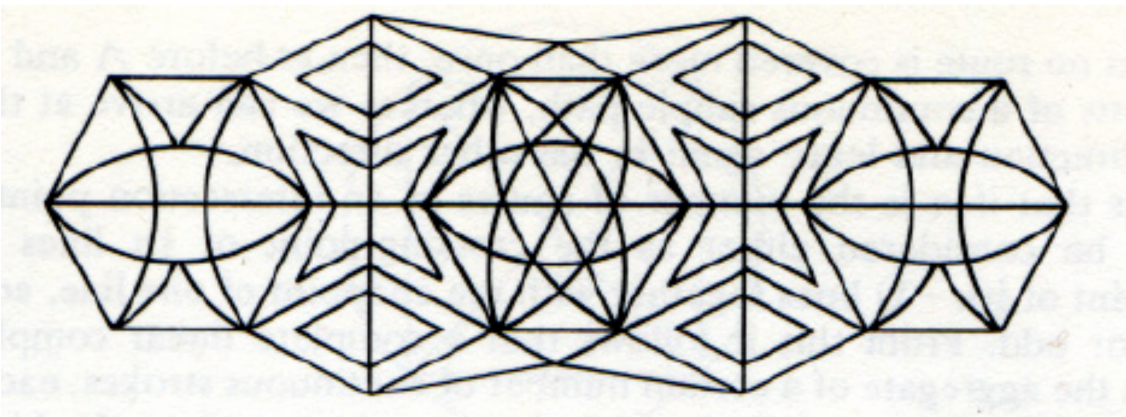


Figura 1.14.

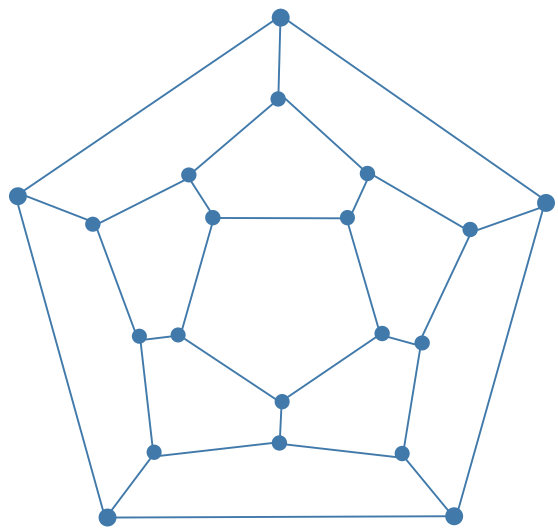
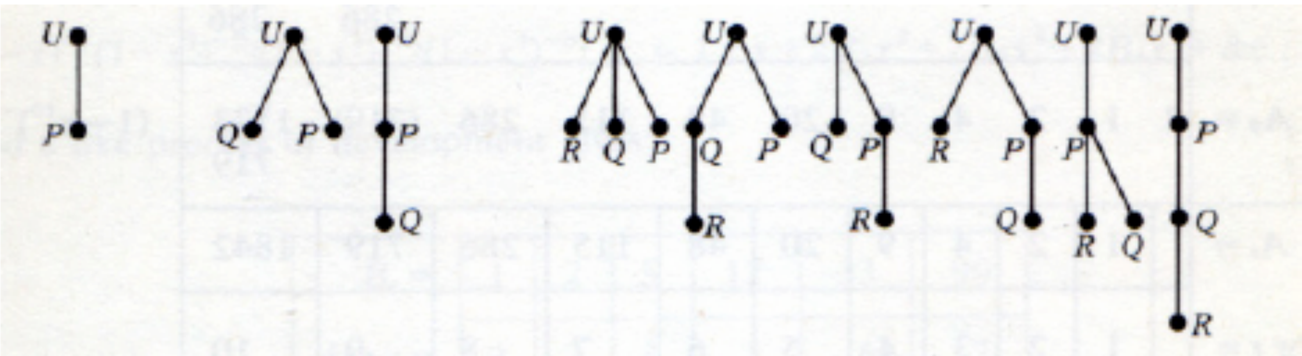


Figura 1.15.



Si osservi che quasi tutti gli esempi fatti riguardano grafi planari, che in effetti costituiscono una grossa percentuale dei grafi utilizzati per formalizzare situazioni reali; questa è la ragione per cui al disegno di grafi planari verrà dato un discreto rilievo in questo corso.

Nello stesso periodo il disegno di grafi appare anche in altri campi della scienza, come la cristallografia e la chimica: i disegni esplicativi di R.J. Hauy (figura 1.16) risultano a metà strada tra disegno geometrico e disegno tridimensionale di grafi. Anche quest'ultimo sarà un argomento trattato nel corso. Per la chimica va fatto un discorso a parte: sono così particolari le tecniche di disegno che si possono mutuare dalla chimica, che in questo corso il disegno di strutture molecolari avrà una posizione importante.

Dal XIX secolo in poi, la visualizzazione di grafi acquista un'importanza sempre maggiore. Inoltre, si osservi che questo *excursus* storico si è focalizzato sulle origini della visualizzazione di strutture astratte di tipo matematico (scoprendo, tra l'altro, che grande importanza hanno avuto i giochi e i puzzle!), ma probabilmente si troverebbe molto materiale anche nel campo dell'ingegneria elettronica e della cartografia (ma non solo). In effetti, in questo corso saranno affrontati degli argomenti che risultano essere delle applicazioni in entrambi questi campi: alcuni algoritmi per la rappresentazione di topologie di interconnessione e circuiti elettrici ed alcune problematiche legate alla riproduzione automatica di carte geografiche. Per quanto riguarda quest'ultimo argomento, esso si è poi esteso al problema più generale dell'etichettatura di grafi, per cui la problematica maggiore si risolve nella massimizzazione della leggibilità (come esemio, vedi figura 1.17).

Figura 1.16.

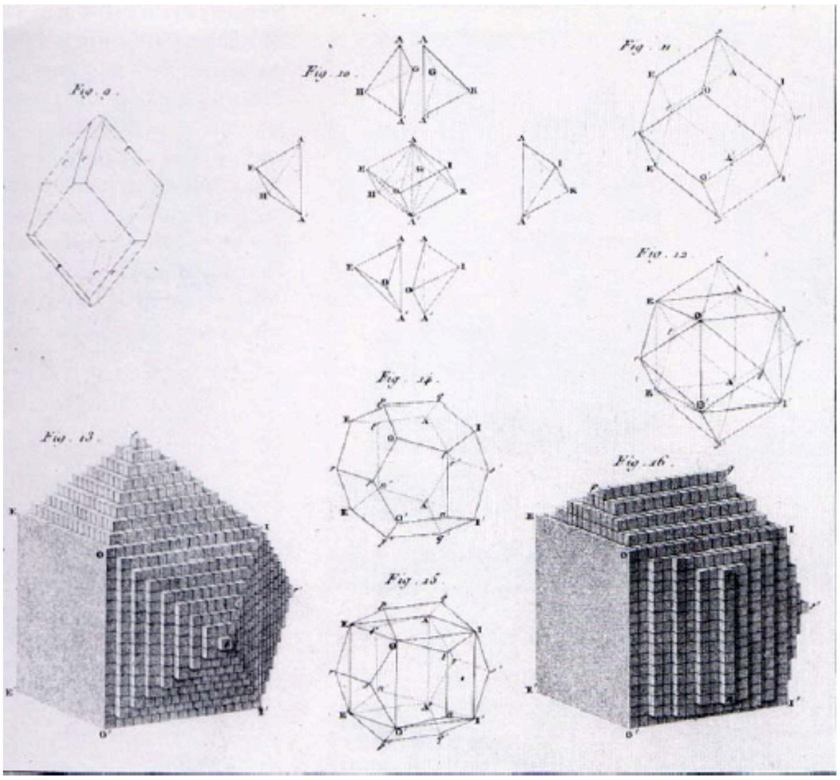
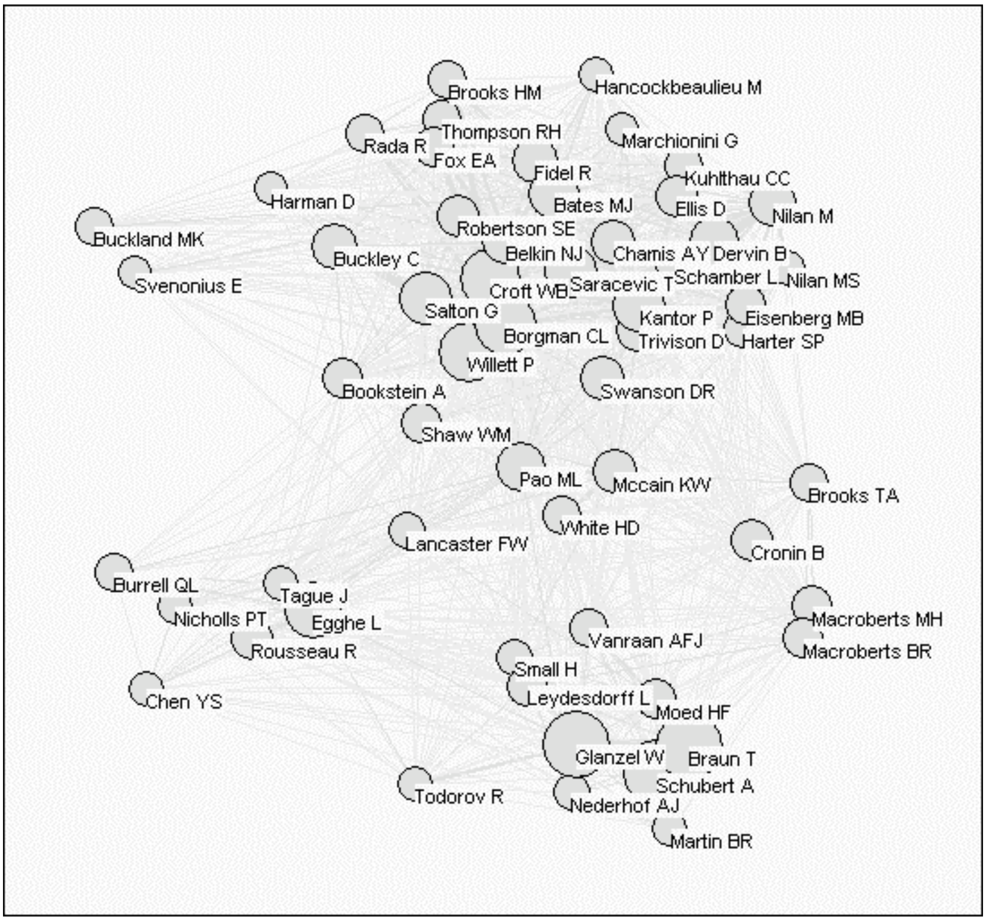


Figura 1.17.



Durante il corso verrà trattata la problematica della <u>visualizzazione di strutture in evoluzione</u>, da due punti di vista: da una parte si studieranno scenari ed algoritmi che permettono di modificare il disegno senza doverlo ricostruire ogni volta, dall'altra si farà cenno a tecniche che consentono di mantenere traccia delle modifiche del grafo.

Il corso tratterà, infine, alcune tecniche per rappresentare gli oggetti nel piano e nello spazio, tenendo conto dei vincoli dettati dal calcolatore (discretizzazione dell'informazione, difficoltà di distinguere i vari piani visivi, ecc.) e tentando di rendere la visualizzazione il più realistica possibile (illuminazione, ombreggiatura).

Fin qui si ha forse avuto l'impressione che la visualizzazione di grafi abbia applicazioni nella scienza ma non nel campo reale. Questo è palesemente falso, se pensiamo al semplicissimo esempio della rete di autobus in una grande città: cosa succederebbe se questa fosse rappresentata con un elenco di numeri e di fermate?

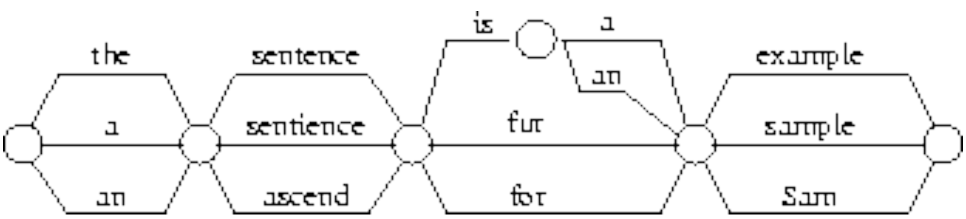
Un altro esempio, forse più vicino al campo informatico, è dato dai *word graphs*. Essi nascono dal campo dello *speech processing* e della *speech recognition*. La speech recognition è un processo complesso che coinvolge molti passi che trasformano l'input in informazioni a livello di astrazione sempre più alto:

1. il segnale audio è trasformato in frequenze digitalizzate e poi normalizzato;
2. vengono individuati i fonemi;
3. i fonemi vengono raggruppati in parole che formeranno frasi.

E' stato dimostrato che l'orecchio umano riconosce correttamente solo il 70% dei fonemi, ma poi il cervello è in grado di capire tutto basandosi sul contesto e sulla semantica. Ma un sistema di riconoscimento non può fare automaticamente questo lavoro, pur tenendo conto che alcuni fonemi possono essere errati. Allora, seleziona un insieme di fonemi che crede di aver riconosciuto con alta probabilità e poi cerca di eliminare molte combinazioni, usando il suo dizionario. L'elenco delle ipotesi rimaste si può rappresentare come word graph (vedi figura 1.17). Il problema si riduce dunque a trovare un cammino che renda la frase di senso compiuto.

Altri esempi in cui è utile la visualizzazione sono rappresentati dai diagrammi di flusso, diagrammi di transizione, diagrammi entità-relazioni, grafi dei processi, e così via (per i dettagli, si veda [KW01] pp.6-14 e 16-17).

Figura 1.17.



Questa carrellata di applicazioni viene conclusa con un ultimo esempio interdisciplinare: la teoria dei gruppi, la statistica la combinatoria discreta e il disegno di grafi vengono tutti combinati insieme per degli studi sociologici attraverso le *reti sociali*. Una rete sociale si ottiene considerando un insieme di persone come nodi ed aggiungendo archi ogni qual volta vi sia tra due persone un qualche tipo di relazione astratta. Questa ricerca è motivata dal fatto che la visualizzazione di strutture sociali e la ricerca di patterns rende più chiaro il funzionamento di una società, dà un'idea di come gli individui interagiscano tra loro e con la società, e fa anche luce sul perché alcune società o individui abbiano più successo di altri. Esempi di reti sociali sono grafi che rispecchiano la crescita economica di alcuni Paesi del terzo mondo, cambiamenti nelle relazioni di coppie sposate nel tempo, minoranze etniche rispetto al loro ruolo nella società, e così via. Quello che rende interessante il problema del disegno di grafi in questo contesto è che non esiste un'idea fissa a priori di quale sia il disegno ottimo. Infatti, il disegno della rete deve aiutare il sociologo a riconoscere dei patterns, e quindi giudicare o migliorare la qualità della rappresentazione è un processo in continua evoluzione.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[B92] W.W.R. Ball: *Mathematical Recreations and Essays*, The MacMillan Company, New York, 11th edition, first published in 1892.

[C04] C. Chen: *Information Visualization beyond the horizon* – 2nd Edition, Springer 2004.

[E36] L. Euler: Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis, *Commentarii Academaie Scentiarum Imperialis Petropolitanae*, 8, 128-140, 1736.

[E59] L. Euler: Solution d'une Question Curieuse qui ne Paroit Soumise a Aucune Analyse, *Mémories de l'Académie des Sciences de Berlin*, 15, 310-337, 1759.

[KW98] M. Kaufmann, D. Wagner (Eds.): *Drawing Graphs – Methods and Models*. Lecture Notes in Computer Science 2025, Springer 1998.

[Kal01] E. Kruja, J. Marks, A. Blair, R. Waters: A Short Note on the History of Graph Drawing, Proc. *Graph Drawing 2001 (GD 301)*, Lecture Notes in Computer Science 2265, 272-286, 2001.

[L47] J.B. Listing: Vorstudien zur Topologie, *Gottinger Studien*, 1, 811-875, 1847.

2. NOZIONI DI BASE

2.1. Modellizzazione teorica degli oggetti da rappresentare; differenza tra oggetto e sua rappresentazione

Riferimenti: [Dal99] pp.1-18.

E' utile visualizzare la maggior parte degli oggetti nella misura in cui la visualizzazione effettivamente reca con se' un'informazione che l'utente può usare: una buona visualizzazione aiuta il lettore a capire il sistema poiché è portatrice di un messaggio immediato. Viceversa, una cattiva visualizzazione, non solo non aiuta, ma spesso è dannosa, perché fa capire ciò che non è, e quindi crea confusione.

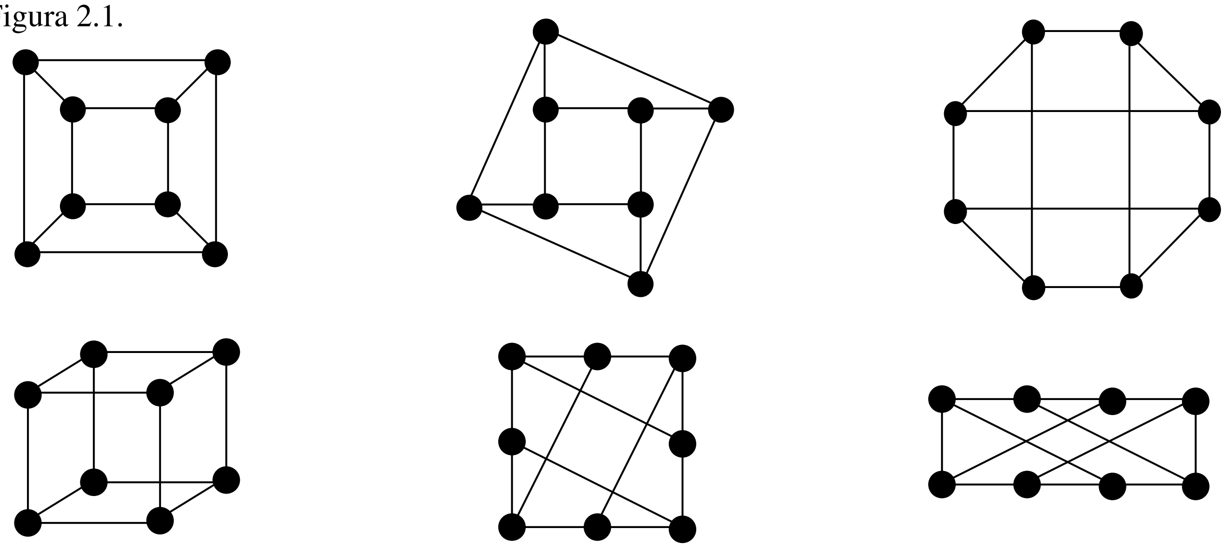
Strutture relazionali che consistono di entità legate da delle relazioni si trovano ovunque in informatica. E' immediato rendersi conto che queste strutture relazionali possono spesso essere rappresentate come *grafi*: le entità sono i *nodi* (o *vertici*), e le relazioni sono gli *archi* (o *spigoli*). E' per questo che spesso si parlerà proprio di visualizzazione di grafi.

E' importante notare che, nonostante l'intuizione, un grafo ed una sua rappresentazione grafica NON sono la stessa cosa: in generale, un grafo ha molte rappresentazioni. Ad esempio, in Fig. 2.1 sono mostrate sei diverse rappresentazioni dello stesso grafo, il cubo.

Ciò nonostante, è nell'uso comune utilizzare la stessa terminologia per un grafo e per la sua rappresentazione.

Comprendere la differenza tra grafo e sua rappresentazione è fondamentale per ottenere delle buone rappresentazioni grafiche: il primo passo da fare, infatti, è capire cosa rappresenta il grafo nella realtà (un circuito? uno schema? una rete stradale? …); solo dopo si procede alla sua rappresentazione, in modo da evidenziare il suo significato primario.

Figura 2.1.



2.2. Definizioni di base di teoria dei grafi

Riferimenti: [Dal99] pp.3-9; un qualunque libro di teoria dei grafi.

Nel seguito verranno usati alcuni concetti di teoria dei grafi che dovrebbero essere noti dai corsi di Combinatoria e di Algoritmi, ma che qui vengono richiamati brevemente.

Un *grafo* $G=(V,E)$ è costituito da una coppia di insiemi, l'insieme finito V di *nodi*, o *vertici*, e l'insieme finito E di coppie non ordinate di nodi, dette *archi*, o *spigoli*. Laddove non sorgono equivoci, gli archi vengono generalmente rappresentati come coppie racchiuse tra parentesi tonde sebbene, essendo coppie non ordinate, sarebbe più corretto racchiuderle tra parentesi graffe. Usualmente, gli interi n ed m indicano il numero di nodi e di archi di cui è composto il grafo. Il numero di archi incidenti ad un certo nodo v è detto *grado di* v.

Un arco (u,v) con $u=v$ è detto *cappio*. Un arco che compare più di una volta in E è detto *arco multiplo*. Un *grafo semplice* non contiene cappi ne' archi multipli.

Un *grafo orientato* è definito in modo analogo al grafo, ma gli archi sono delle coppie ordinate. Dato un *arco orientato* (u,v), esso è un arco *uscente* da u ed *entrante* in v. Nodi senza archi uscenti (rispettivamente, entranti) sono detti *pozzi* (rispettivamente, *sorgenti*). Il *grado entrante* (rispettivamente, *grado uscente*) di un vertice è il numero dei suoi archi entranti (rispettivamente, uscenti).

Teorema: *Dato un grafo non orientato G, la somma dei gradi di tutti i nodi è pari a 2m. Dato un grafo orientato G, la somma dei gradi entranti di tutti i nodi è pari alla somma dei gradi uscenti di tutti i nodi, che è pari ad m.*

Dimostrazione. Contiamo in due modi diversi le coppie (nodo, spigolo) che sono in relazione di incidenza, cioè contiamo in due modi le coppie dell'insieme

$$A=\{(x,e): x\in V, e\in E, x\in e\}.$$

Fissato un nodo $x\in V$, il numero di archi ad esso incidenti è dato dal suo grado. Quindi

$$|A|=\sum_{x\in V}\deg ree(x).$$

Per ogni arco $e\in E$, esistono esattamente due nodi ad esso incidenti. Quindi $|A|=2|E|$.

Il caso orientato si dimostra analogamente. **CVD**

Corollario (detto *Regola della stretta di mano*). *Sia G=(V,E) un grafo finito. Il numero dei nodi di G che hanno grado dispari è pari.*

Dimostrazione. $\sum_{x\in V}\deg ree(x)=\sum_{\substack{x\in V\\ \deg ree(x)\, pari}}\deg ree(x)+\sum_{\substack{x\in V\\ \deg ree(x)\, dispari}}\deg ree(x)$. Ma per il teorema precedente si ha:

$$\sum_{x\in V}\deg ree(x)=2|E|$$

che è un numero pari. Poiché la somma di un numero pari di dispari è pari, mentre la somma di un numero dispari di dispari è dispari, G deve avere un numero pari di nodi di grado dispari. **CVD**

Nella sua forma più semplice, un *disegno* Γ di un grafo G è una funzione che mappa ogni nodo v in un punto distinto $\Gamma(v)$, ed ogni arco (u,v) in una curva di Jordan aperta $\Gamma(u,v)$ che non attraversa nessun punto in cui viene mappato un nodo e che ha come estremi $\Gamma(u)$ e $\Gamma(v)$. Un arco orientato è usualmente rappresentato con una freccia che ne indichi il verso di percorrenza.

Un *disegno* è *piano* se non vi sono incroci tra archi. Un *grafo* è *planare* se ammette un disegno piano. I grafi planari giocano un ruolo molto importante nell'area della visualizzazione, per tre ragioni: innanzi tutto, l'incrocio di archi peggiora la leggibilità della rappresentazione; inoltre, la teoria dei grafi planari ha un posto privilegiato nell'ambito della teoria dei grafi, e questa teoria così ben sviluppata può essere sfruttata per rappresentare al meglio i grafi planari; infine, i grafi planari sono *sparsi*, cioè il numero degli archi è $O(n)$: la formula di Eulero garantisce che un grafo planare non ha più di $3n$-6 archi.

Un disegno piano partiziona il piano in regioni topologicamente connesse, dette *facce*. L'unica faccia illimitata è detta *faccia esterna*.

Un *cammino (orientato)* in un grafo $G=(V,E)$ è una sequenza $(v_1,v_2, \dots v_k)$ di vertici distinti di G, tale che (v_i,v_{i+1}) sia un arco di E, per ogni $1 \leq i \leq k-1$. Un cammino (orientato) è un *ciclo (orientato)* se $(v_k,v_1) \in E$. Un grafo orientato è *aciclico* se non contiene cicli orientati.

Un grafo $G'=(V',E')$, tale che $V' \subseteq V$ ed $E' \subseteq E \cap (V' \times V')$ è un *sottografo* di $G=(V,E)$. Se risulta $E'=E \cap (V' \times V')$ allora G' si dice *indotto* da V'.

Un grafo G è *connesso* se, per ogni coppia di vertici (u,v), esiste un cammino tra u e v. I sottografi connessi massimali di un grafo G sono detti *componenti connesse* di G. Non è restrittivo supporre che i grafi considerati siano connessi: se così non fosse, si potrebbero considerare tutte le loro componenti connesse.

Se un grafo G è connesso, ed è sufficiente rimuovere un solo nodo x per sconnetterlo, x viene detto *punto di articolazione* di G. Se un tale nodo non esiste, il grafo si dice *2-connesso*:

Definizione: Un *grafo* è *2-connesso* se, rimuovendo un qualunque nodo e tutti gli archi ad esso incidenti, il grafo rimane connesso. In un tale grafo due archi qualunque giacciono su di uno stesso ciclo semplice.

La 2-connettività è verificabile, tramite modifica dell'algoritmo di visita in profondità di un grafo, con complessità $O(n+m)$. Per dettagli, si veda un testo di Algoritmi.

Una *componente 2-connessa* di G è un sottografo massimale 2-connesso; convenzionalmente, un singolo nodo è considerato una componente 2-connessa.

Teorema: *Un grafo G è planare se e sole se le sue componenti 2-connesse sono planari.*

2.3. Parametri per la visualizzazione

Riferimenti: [Dal99] pp.11-18.

Nel seguito verrano descritti algoritmi per visualizzare grafi o, più in generale, strutture. Quindi l'input di ciascun algoritmo è il grafo che si deve rappresentare. E' necessario sfruttare le conoscenze che si hanno su quel grafo per scegliere l'algoritmo adatto. Ad esempio, è conveniente avvalersi dell'informazione che il grafo sia diretto o no, aciclico o no, planare o no, ecc.

Quindi, implicitamente, ci si avvale dell'appartenenza del grafo ad una particolare classe di grafi. Questa conoscenza è importante per almeno due ragioni:

a. molti algoritmi lavorano efficientemente solo su grafi appartenenti ad una certa classe;
b. l'utente vuole spesso rappresentare il grafo in modo che le sue proprietà combinatorie siano evidenti.

Dunque l'appartenenza ad una classe è un'importante parametro da chiedere in input per avere una buona visualizzazione. Un altro parametro scaturisce dalla presa di coscienza che una visualizzazione ottima in assoluto non esiste, poiché ciò dipende fortemente dal dominio di applicazione della visualizzazione stessa. Ma non è possibile dare in input ad un algoritmo o ad un software un 'dominio di applicazione' in quanto esso risulterebbe un concetto troppo astratto, e allora è necessario definire dei parametri più concreti, quali le convenzioni, i criteri estetici e i vincoli.

2.3.1. Convenzioni

Una *convenzione* è una regola basilare che la rappresentazione DEVE soddisfare per essere ritenuta ammissibile.

Per esempio, nella visualizzazione di un diagramma di flusso, i nodi devono essere delle scatole di diversa forma e gli archi devono essere orientati.

L'insieme di convenzioni per visualizzare degli oggetti dalla vita reale può essere anche molto complicato, per cui sono state definite delle convenzioni generiche, che si possono combinare tra loro; nel seguito sono elencate le più comuni:

a. *rappresentazione polyline*: gli archi vengono rappresentati come delle spezzate;
b. *rappresentazione rettilinea*: gli archi vengono rappresentati come dei segmenti rettilinei;
c. *rappresentazione ortogonale*: gli archi sono rappresentati come delle spezzate i cui segmenti siano alternatamente orizzontali o verticali;
d. *rappresentazione su griglia*: i nodi, gli incroci e le svolte degli archi hanno tutti coordinate intere;
e. *rappresentazione planare*: per grafi planari, non vi sono incroci tra archi;
f. *rappresentazione upward* (rispettivamente*, downward)*: per grafi orientati ed aciclici, ogni arco è rappresentato da una curva non decrescente, cioè punta verso l'alto (rispettivamente, non crescente, cioè punta verso il basso); in particolare, una rappresentazione è *strettamente upward* (rispettivamente, *strettamente downward*) se ogni arco viene rappresentato come una curva strettamente crescente (rispettivamente, decrescente).

In tutte queste rappresentazioni, i nodi sono usualmente visualizzati come dei punti.

Si osservi che le rappresentazioni rettilinee ed ortogonali sono casi speciali del polyline. La rappresentazione polyline permette una grande flessibilità perché gli archi possono essere approssimati con delle linee curve. La rappresentazione rettilinea è molto usata in teoria dei grafi, mentre il disegno ortogonale è molto diffuso per la rappresentazione dei circuiti e per i diagrammi di software engineering. La planarità è una caratteristica da ricercare sempre perché rende il disegno più chiaro, ma solo i grafi planari si possono rappresentare con questa convenzione. Grafi aciclici orientati che rappresentano strutture gerarchiche sono spesso rappresentati come upward.

In Fig. 2.2 sono mostrate diverse rappresentazioni dello stesso grafo, $K_{3,3}$: in alto a sinistra il grafo è visualizzato secondo la rappresentazione polyline, in alto a destra secondo la rappresentazione rettilinea, in basso a sinistra come ortogonale ed infine, in basso a destra come polyline su griglia. La Fig. 2.3 mostra invece un grafo orientato, rappresentato come planare polyline (a sinistra) e come polyline strettamente upward (a destra).

Figura 2.2.

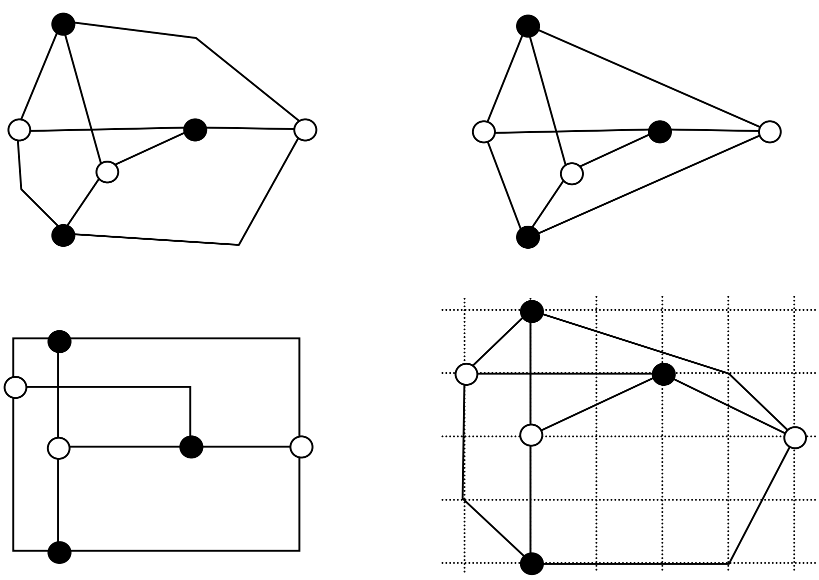
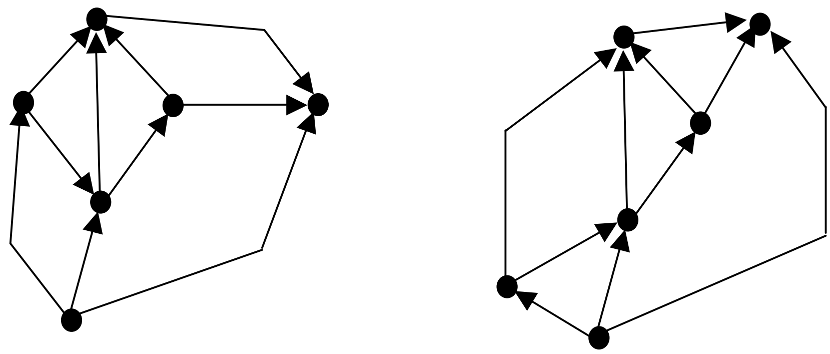


Figura 2.3.



2.3.2. Criteri estetici

L'*estetica* specifica le proprietà della rappresentazione che si VORREBBE fossero verificate affinché la struttura visualizzata sia leggibile al meglio. I criteri estetici sono, quindi, tutte funzioni da ottimizzare.

Alcuni criteri estetici sono:

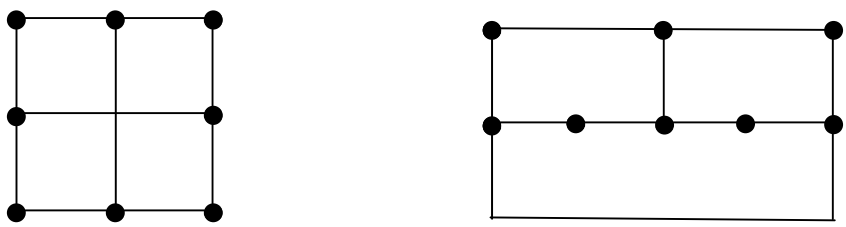
a. *numero di incroci*: minimizzazione del numero di incroci tra le rappresentazioni degli archi; idealmente si vorrebbe avere una rappresentazione planare;
b. *area* (o *volume*): minimizzazione dell'area (volume) occupata dalla rappresentazione; questo criterio è importante per riuscire a visualizzare la rappresentazione per intero (altrimenti può uscire dallo schermo);
c. *lunghezza totale degli archi*: minimizzazione della somma delle lunghezze di tutti gli archi;
d. *lunghezza massima degli archi*: minimizzazione della lunghezza dell'arco più lungo;
e. *numero totale di svolte*: minimizzazione del numero di svolte degli archi di tutta la rappresentazione;
f. *numero di svolte per arco*: minimizzazione del numero di svolte su ogni arco;
g. *risoluzione angolare*: massimizzazione dell'angolo più piccolo tra due archi incidenti sullo stesso nodo; questo criterio è rilevante soprattutto per il disegno rettilineo;
h. *aspect ratio*: minimizzazione del rapporto tra lato maggiore e lato minore del rettangolo circoscritto alla rappresentazione; serve per ottenere delle rappresentazioni facilmente visualizzabili sullo schermo o sul foglio: una rappresentazione con alta aspect ratio può non essere visualizzabile, anche se la sua area è molto piccola;
i. *simmetrie*: visualizzazione delle simmetrie ogni volta che sia possibile.

Si osservi che, per la consistenza della definizione del criterio estetico *area*, si deve assumere sempre l'esistenza di una regola di risoluzione, che implica un'area minima finita per qualunque rappresentazione. Una tipica regola di risoluzione consiste nel richiedere disegni su griglia, in modo che l'unità di misura sia fissata. L'area può essere definita in due modi diversi: l'area del più piccolo poligono convesso che racchiude la rappresentazione o del rettangolo circoscritto alla rappresentazione.

Tutti i criteri estetici ora definiti sono naturalmente associati a dei problemi di ottimizzazione, molti dei quali sono NP-ardui, quindi quello che si può fare è trovare delle euristiche che approssimano l'ottimo.

E' da notare che la maggior parte dei criteri estetici sono in conflitto tra loro; si considerino ad esempio i criteri *numero totale di svolte* e *numero di incroci*: in Fig. 2.4, sono mostrate due rappresentazioni dello stesso grafo, in cui si adotta la convenzione del disegno ortogonale; in Fig. 4, parte sinistra, si minimizza il numero di svolte, mentre in Fig. 4, parte destra, si rappresenta il grafo come piano, minimizzando cioè il numero totale di incroci. E' possibile dimostrare che non esiste una rappresentazione che soddisfi entrambi i criteri estetici. Ne segue che per la maggior parte degli algoritmi è necessario definire una relazione di precedenza tra criteri estetici; tale relazione non può chiaramente essere valida in assoluto poiché alcune applicazioni richiedono alcuni criteri come prioritari mentre altre no. Molti algoritmi noti in letteratura risultano suddivisi in diversi passi, ciascuno dei quali tenta di migliorare un certo criterio estetico: la permutazione dell'ordine di questi passi porta a risultati totalmente diversi.

Figura 2.4.



2.3.4. Vincoli

Mentre le convenzioni ed i criteri estetici sono regole generali che si riferiscono all'intero disegno, i *vincoli* si riferiscono a specifiche parti del grafo o della sua rappresentazione. Alcuni, comunemente usati, sono:

a. *centro*: posizionamento di un nodo *v* al centro della rappresentazione;
b. *esterno*: posizionamento di un nodo *v* sulla faccia esterna della rappresentazione;
c. *cluster*: posizionamento di un certo insieme di nodi vicini;
d. *sinistra-destra* (rispettivamente, *alto-basso*): rappresentazione di un certo cammino di *G* in orizzontale (rispettivamente, verticale) da sinistra a destra (rispettivamente, dall'altro verso il basso);
e. *forma*: rappresentazione di un certo sottografo con una forma predefinita.

2.3.5. Efficienza

Inutile dire che fondamentale richiesta per tutti gli algoritmi di visualizzazione è l'*efficienza computazionale*.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[Dal99] G. Di Battista, P. Eades, R. Tamassia, I.G. Tollis: *Graph Drawing – Algorithms for the visualization of graphs*, Prentice Hall, 1999.