Progettazione d'algoritmi

Esercizi Backtracking

Progettazione d'algoritmi
Prof. Monti

Il Sudoku è una griglia di 9×9 celle. Il giocatore aggiunge i numeri da 1 a 9 ai campi vuoti in modo che ogni numero deve comparire una volta sola in:

- **ogni riga**
- **ogni colonna**
- **ogni settore 3 x 3.**

Esempio di istanza:

5	3	—	—	7	—	—	—	—
6	—	—	1	9	5	—	—	—
—	9	8	—	—	—	—	6	—
8	—	—	—	6	—	—	—	3
4	—	—	8	—	3	—	—	1
7	—	—	—	2	—	—	—	6
—	6	—	—	—	—	2	8	—
—	—	—	4	1	9	—	—	5
—	—	—	—	8	—	—	7	9

ESEMPI:

—	—	—	—	4	5	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	3
—	—	9	8	—	—	—	4	6
—	—	4	5	2	—	—	7	1
—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	8	—	—	3	9	5	—	—
6	1	—	—	—	3	7	—	—
9	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	2	7	—	—	—	—

$\Rightarrow$

1	2	6	3	4	5	9	8	7
8	4	7	9	6	2	1	5	3
5	3	9	8	1	7	2	4	6
3	9	4	5	2	6	8	7	1
7	6	5	1	8	4	3	9	2
2	8	1	7	3	9	5	6	4
6	1	8	4	9	3	7	2	5
9	7	2	6	5	1	4	3	8
4	5	3	2	7	8	6	1	9

2	—	—	—	—	—	—	—	7
—	9	—	—	—	2	—	5	—
—	—	—	—	—	4	6	—	—
—	—	—	—	—	1	3	2	—
—	—	—	—	5	—	—	—	—
—	8	4	9	—	—	—	—	—
—	—	6	8	—	—	—	—	—
—	5	—	7	—	—	—	9	—
3	—	—	—	—	—	—	—	4

$\Rightarrow$

2	4	5	1	6	8	9	3	7
6	9	8	3	7	2	4	5	1
7	1	3	5	9	4	6	8	2
5	6	7	4	8	1	3	2	9
9	3	2	6	5	7	1	4	8
1	8	4	9	2	3	5	7	6
4	2	6	8	3	9	7	1	5
8	5	1	7	4	6	2	9	3
3	7	9	2	1	5	8	6	4

Progettare un algoritmo che prende come parametro una matrice 9×9 che codifica uno schema di sudoku da risolvere (lo 0 indica il campo vuoto) e restituisce lo schema risolto.

5	3	0	0	7	0	0	0	0
6	0	0	1	9	5	0	0	0
0	9	8	0	0	0	0	6	0
8	0	0	0	6	0	0	0	3
4	0	0	8	0	3	0	0	1
7	0	0	0	2	0	0	0	6
0	6	0	0	0	0	2	8	0
0	0	0	4	1	9	0	0	5
0	0	0	0	8	0	0	7	9

$\Rightarrow$

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

ESERCIZIO 2

Il problema delle n regine. Data una scacchiera $n \times n$ vogliamo calcolare quanti diversi modi ci sono di disporre sulla scacchiera n regine in modo che nessuna di esse sia in grado di catturarne un'altra in base alle regole degli scacchi. Perció una disposizione dovrà prevedere che nessuna delle n regine abbia colonna, riga o diagonale in comune con un altra.

Ad esempio, per $n = 8$ ecco due delle possibili disposizioni:

							x
	x						
			x				
x							
						x	
				x			
		x					
					x		

			x				
	x						
						x	
		x					
					x		
							x
x							
				x			

Bisogna quindi progettare una funzione di backtracking che prende come parametro l'intero n e restituisce il numero di disposizioni lecite possibili.

Non è difficile convincersi che per $n = 2$ ed $n = 3$ non esiste alcuna disposizione lecita.
Per i primi valori di n la funzione deve dare in tempi accettabili le seguenti risposte:

n	disposizioni
1	1
2	0
3	0
4	2
5	10
6	4
7	40
8	92
9	352
10	724
11	2680
12	14200
13	73712
14	365596
15	2279184

ESERCIZIO 3

Grattacieli. **Abbiamo una griglia $n \times n$ che rappresenta la mappa di una città in cui in ogni casella c'è un edificio che può avere da uno a n piani.**
Vogliamo trovare il numero di piani di ogni edificio sapendo che in ogni riga o colonna non vi sono edifici con lo stesso numero di piani.
Per aiutarci in questo lavoro vengono forniti dei numeri esterni alla griglia che indicano quanti edifici si vedono da quella angolazione (gli edifici più alti nascondono i più bassi).

Ad esempio per la griglia con $n = 5$ in basso a sinistra la soluzione è a destra.

	4	2	1	3	2	
3						3
2						4
2						1
1						3
3						2
	2	4	3	1	2	

$\Longrightarrow$

	4	2	1	3	2	
3	1	4	5	3	2	3
2	3	5	4	2	1	4
2	4	3	2	1	5	1
1	5	2	1	4	3	3
3	2	1	3	5	4	2
	2	4	3	1	2	

Altro esempio:

In basso a destra c'è la soluzione per la griglia con $n = 8$ evidenziata in basso a sinistra.

	4	5	4	3	3	3	2	1	
8									1
7									2
4									2
4									3
6									2
1									2
3									2
2									2
	2	1	2	5	4	3	3	3	

$\Longrightarrow$

	4	5	4	3	3	3	2	1	
8	1	2	3	4	5	6	7	8	1
7	2	3	4	5	6	7	8	1	2
4	5	6	7	8	1	2	3	4	2
4	4	5	2	7	8	1	6	3	3
6	3	4	5	6	7	8	1	2	2
1	8	1	6	3	2	5	4	7	2
3	6	7	8	1	4	3	2	5	2
2	7	8	1	2	3	4	5	6	2
	2	1	2	5	4	3	3	3	

Progettare un algoritmo che, data un'istanza del problema, restituisce la griglia con il numero di piani per ognuno degli n^2 edifici.

L'istanza è fornita per mezzo di 4 liste N, E, S e O, ciascuna lista contiene n interi appartenenti all'intervallo $1 \dots n$. Le 4 liste riportano i numeri esterni alla griglia nelle 4 direzioni (N a nord, E a est, S a sud e O a ovest).

Ad esempio per le 4 liste

$$N = [4, 2, 1, 3, 2], \quad E = [3, 4, 1, 3, 2] \quad S = [2, 4, 3, 1, 2] \quad O = [3, 2, 2, 1, 3]$$

la funzione restituisce la matrice

1	4	5	3	2
3	5	4	2	1
4	3	2	1	5
5	2	1	4	3
2	1	3	5	4

ESERCIZIO 4

Francobolli **Bisogna emettere n francobolli di tagli diversi. Sapendo che su di una busta possono trovar posto al più m francobolli vogliamo sapere quali tagli bisogna emettere in modo da massimizzare l'intervallo di affrancature possibili.**
L'intervallo da massimizzare deve partire da 1.

Ad esempio:

- $n = 2$ **e** $m = 1$ **l'intervallo massimo è 2 e lo si ottiene scegliendo i tagli $[1, 2]$**
- $n = 4$ **e** $m = 2$ **l'intervallo massimo è 12 e lo si ottiene scegliendo i tagli $[1, 3, 5, 6]$.**
- $n = 4$ **e** $m = 5$ **l'intervallo massimo è 71 e lo si ottiene scegliendo i tagli $[1, 4, 12, 21]$.**
- $n = 2$ **e** $m = 2$ **l'intervallo massimo è 4 e lo si ottiene in due modi diversi: $[1, 2]$ o $[1, 3]$.**

Progettare un algoritmo che prende come parametri gli interi positivi n ed m e restituisce la lunghezza massima possibile per l'intervallo di affrancature e l'insieme con le differenti affrancature che lo rendono possibile.

Ad esempio per per i primi 4 valori di n ed m le risposte che l'algoritmo deve fornire sono riportate nella griglia in basso.

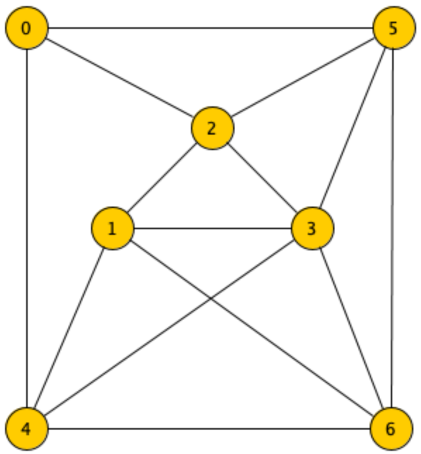
	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
$m=1$	$1\{[1]\}$	$2\{[1,2]\}$	$3\{[1,2,3]\}$	$4\{[1,2,3,4]\}$
$m=2$	$2\{[1]\}$	$4\{[1,2],[1,3]\}$	$8\{[1,3,4]\}$	$12\{[1,3,5,6]\}$
$m=3$	$3\{[1]\}$	$7\{[1,3]\}$	$14\{[1,4,5]\}$	$24\{[1,4,7,8]\}$
$m=4$	$4\{[1]\}$	$10\{[1,3],[1,4]\}$	$26\{[1,5,8]\}$	$44\{[1,3,11,18]\}$

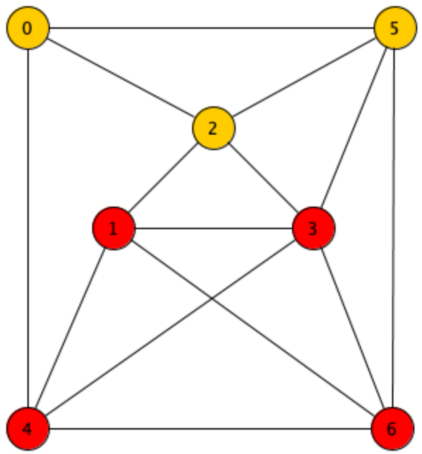
Qual'è il valore che bisogna restituire per $n=m=6$?

ESERCIZIO 5

Il problema della Cricca **Una cricca in un grafo (non diretto) è un suo sottografo completo.**
Dato un grafo non diretto vogliamo trovare una sua cricca di dimensioni massime.

Ad esempio in basso a destra abbiamo un grafo ed in basso a sinistra in rosso abbiamo evidenziata la sua cricca massima.





Progettate un algoritmo che prende come parametro un grafo non diretto e restituisce la dimensione della cricca massima e l'insieme contenente i vertici di una suacricca massima.

Ad esempio per il grafo

$$
\begin{aligned}
&G = \\
&\{ \\
&\quad 0 : [2, 5, 4], \\
&\quad 1 : [2, 3, 4, 6], \\
&\quad 2 : [0, 1, 3, 5], \\
&\quad 3 : [1, 2, 5, 6], \\
&\quad 4 : [0, 1, 3, 6], \\
&\quad 5 : [0, 2, 3, 6], \\
&\quad 6 : [1, 3, 4, 5] \\
&\}
\end{aligned}
$$

l'algoritmo restituisce 4 e l'insieme $\{1, 3, 4, 6\}$