

Progettazione di algoritmi

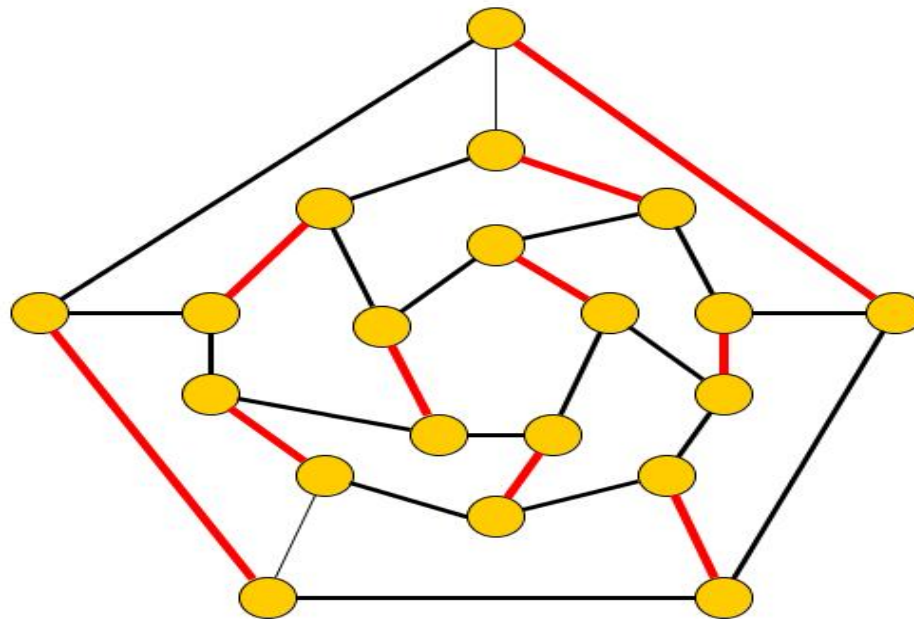
Reti di flusso (3)

Esempi di applicazione del massimo flusso.

- Esempi di applicazione del massimo flusso:
- Abbinamento massimo
- Cammini arco disgiunti su grafi diretti e su grafi non diretti
- Il grado di connettività di un grafo

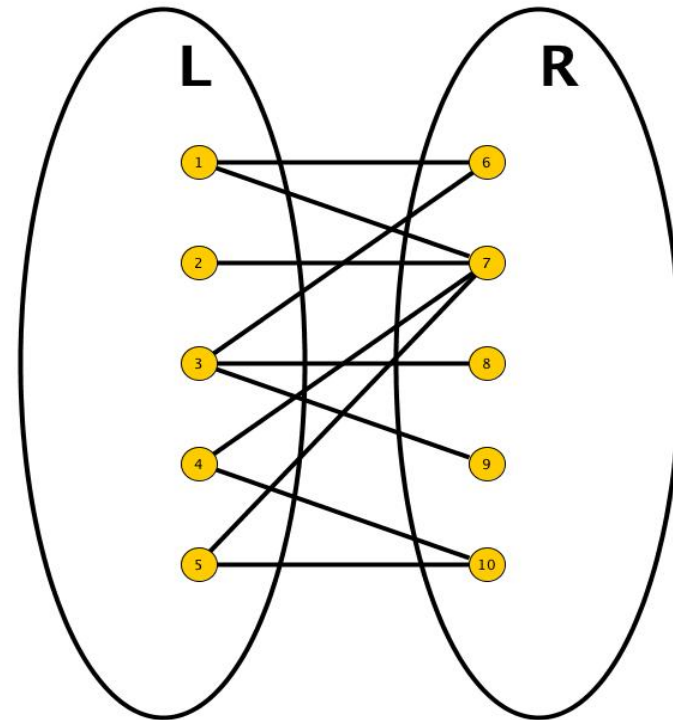
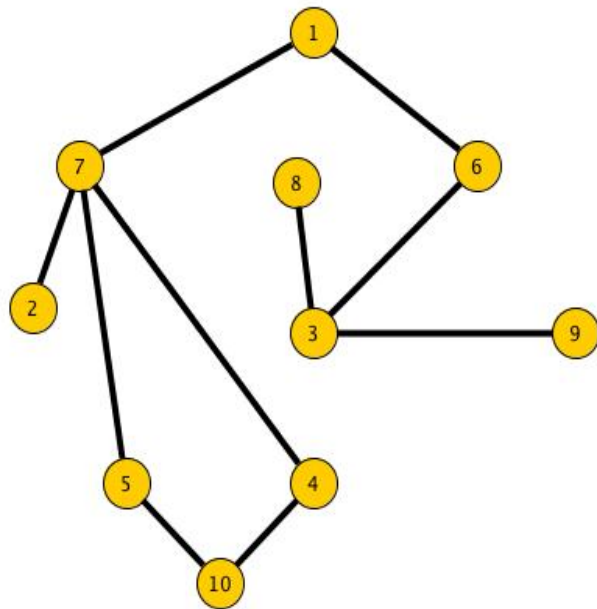
DEF. Dato un grafo G , un sottoinsieme dei suoi archi M è un **abbinamento** se ogni nodo di G appare in al più un arco di M .

Un abbinamento è **massimo** se non ne esistono altri di cardinalità maggiore.



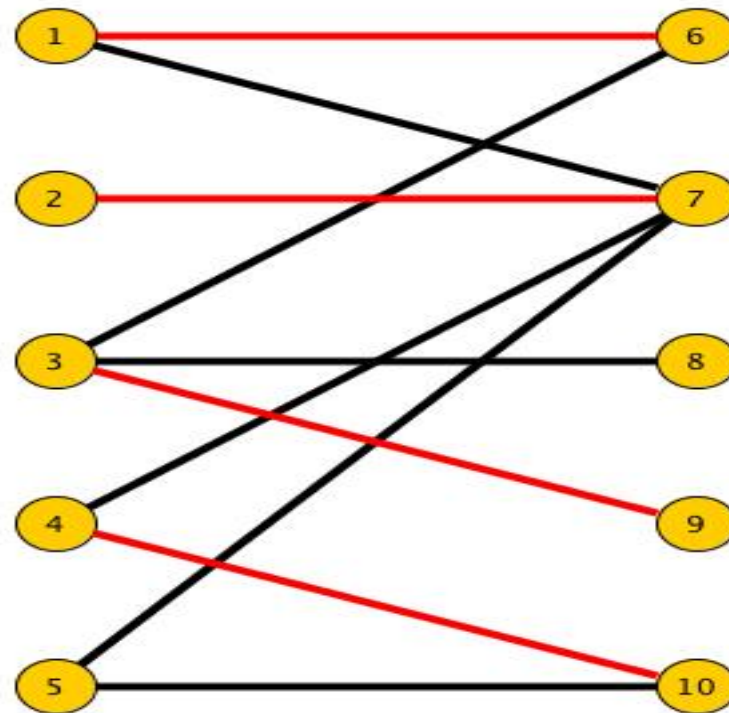
- In figura un grafo con in rosso un suo abbinamento massimo (è massimo perché ogni nodo compare come estremo di un arco dell'abbinamento).

DEF. Un grafo G è **bipartito** se i suoi nodi possono essere partizioni in due sottoinsiemi L e R tali che ogni arco del grafo connette un nodo di L con un nodo di R .



- Il grafo di sinistra è bipartito (a destra è riportata la sua bipartizione)

Il problema dell'abbinamento massimo in un grafo bipartito. Dato un grafo bipartito $G = (L \cup R, E)$, vogliamo trovare un abbinamento di massima cardinalità per G .



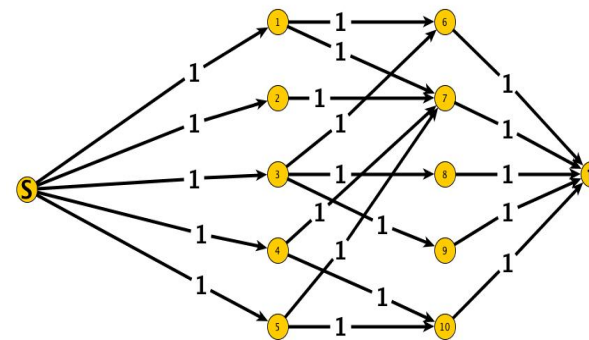
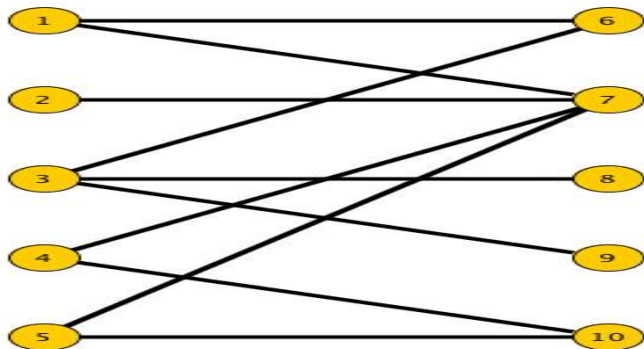
- Gli archi rossi costituiscono nell'esempio un abbinamento di cardinalità 4.

La ricerca dell'abbinamento di massima cardinalità trova applicazione in moltissimi ambiti:

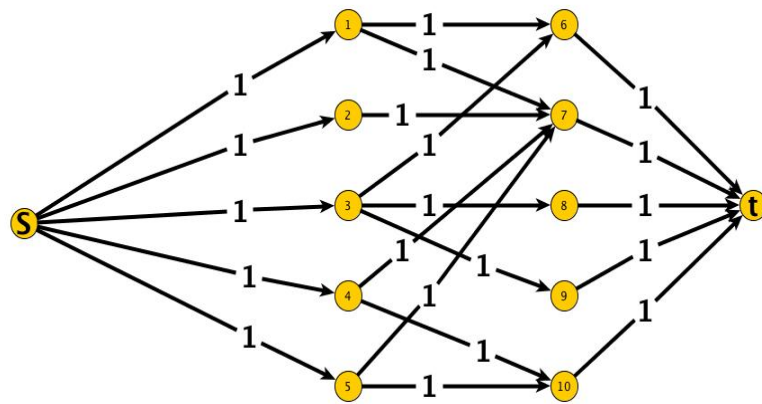
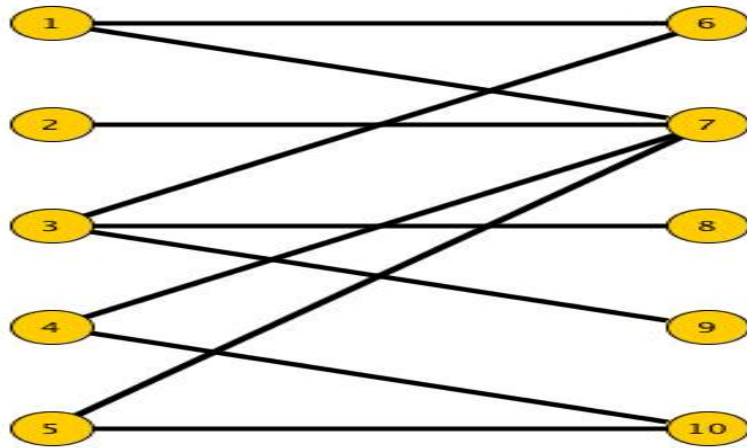
- Assegnazione di lavori a macchine, in modo tale che ogni lavoro sia assegnato ad al più una macchina ed ogni macchina abbia assegnato al più un lavoro.
- In biologia: predizione della struttura di RNA
- In chimica: determinazione delle posizioni dei legami doppi in strutture chimiche.
-

Possiamo formulare il problema in termini di flusso massimo:

- Dato il grafo bipartito $G = (V = L \cup R, E)$ creiamo una rete di flusso G' come segue:
 - introduciamo due nuovi nodi s e t ,
 - da s facciamo partire archi diretti verso i nodi in L
 - dai nodi in R facciamo partire archi verso il nodo t
 - direzioniamo tutti gli archi in E tra nodi di L ed R da L a R .
 - Infine, ad ogni arco viene assegnata capacità 1.



- A sinistra un grafo bipartito G ed a destra la rete G' che gli corrisponde.



- A sinistra un grafo bipartito G ed a destra la rete G' che gli corrisponde.
- Dimostreremo il seguente risultato:

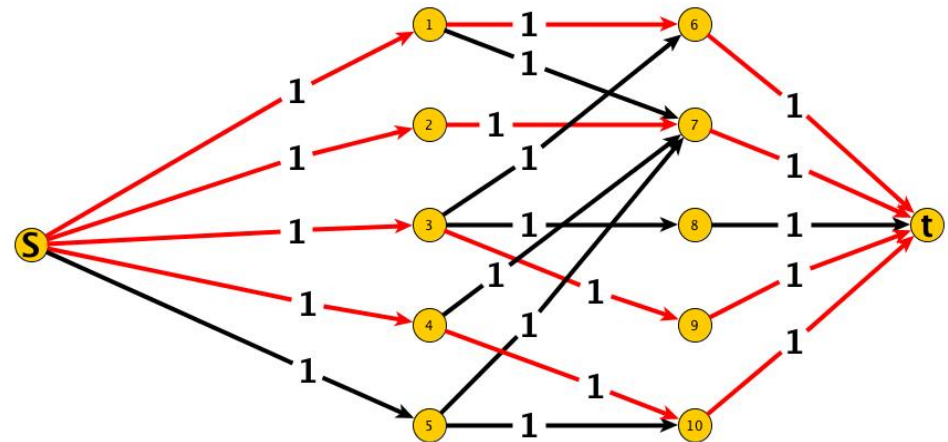
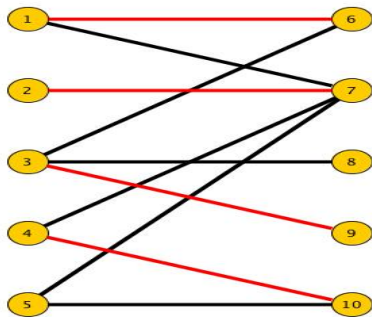
la cardinalità massima per gli abbinamenti del grafo G
 $=$
 il valore del flusso massimo nella rete G'

- Il problema della ricerca del massimo abbinamento in un grafo G con n nodi ed m archi è dunque risolvibile in tempo $O(mn)$
 - basta ricordare che l'algoritmo di Ford-Fulkerson richiede tempo $O(m' \cdot v(f^*))$ dove m' sono gli archi della rete e f^* è il flusso massimo. In questo caso $m' = O(m)$ (per costruzione) e $v(f^*) \leq n$ (il grado uscente di s)

la cardinalità massima per gli abbinamenti del grafo G
 $\leq$
 il valore del flusso massimo nella rete G'

Prova:

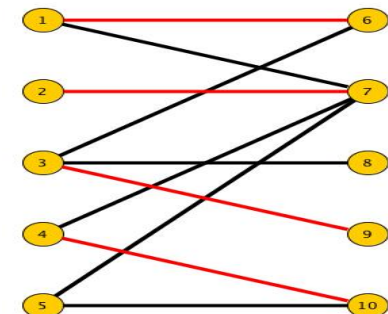
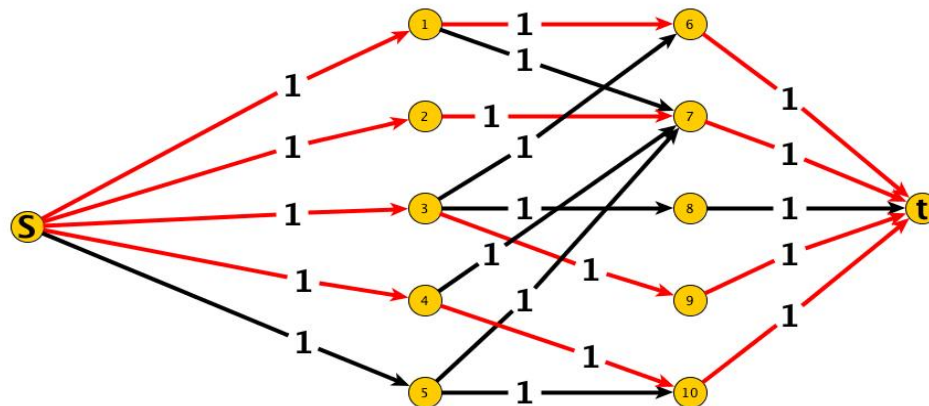
- Sia M un abbinamento di massima cardinalità k .
- Considera il flusso che manda:
 - 1 unità di flusso lungo ogni arco che parte dalla sorgente e va verso un nodo in L che è estremo di archi di M
 - 1 unità di flusso lungo ogni arco corrispondente agli archi di M
 - 1 unità di flusso lungo ogni arco che parte da un nodo in R che è estremo di archi di M e va verso t
- ovviamente $v(f) = k$.



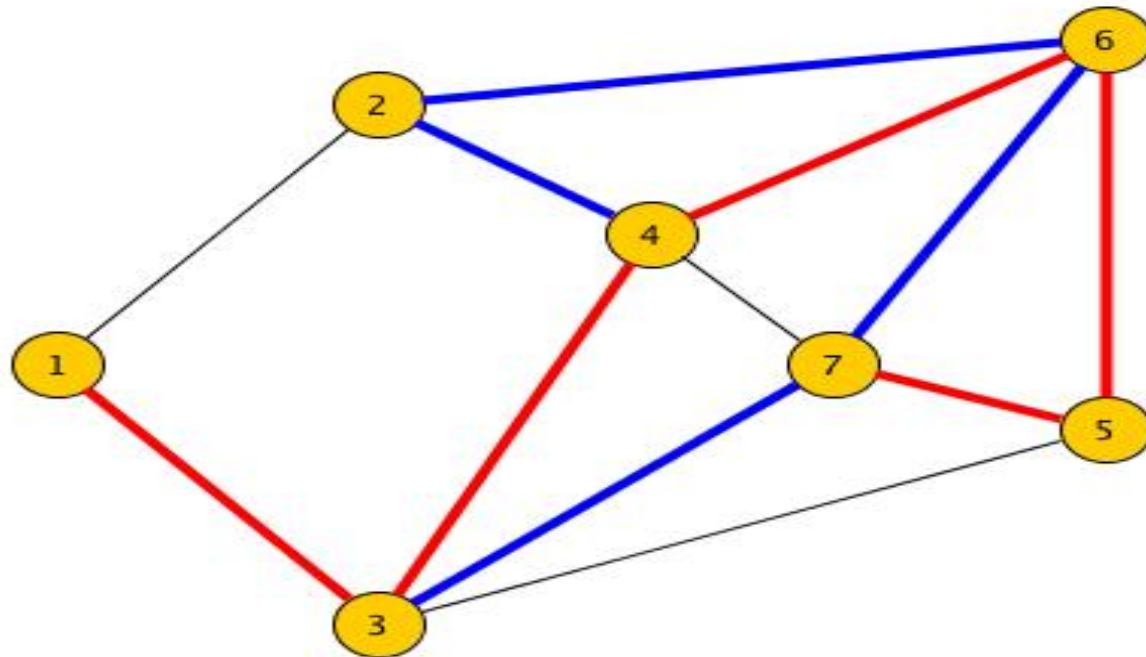
Il valore del flusso massimo nella rete G'
 $\leq$
la cardinalità massima per gli abbinamenti del grafo G

Prova:

- Sia f un flusso massimo nella rete G' e sia $v(f) = k$.
- k è un intero e $f(e) \in \{0, 1\}$ (perché le capacità degli archi di G' sono interi).
- Ci sono esattamente k nodi in L che hanno flusso entrante pari ad 1.
 - Infatti, poiché $v(f) = k$ esattamente k unità di flusso partono da s , gli unici archi che partono da s vanno verso nodi in L , quindi esattamente k nodi in L hanno una unità di flusso entrante pari ad 1.
- Ci sono esattamente k archi che partono da nodi distinti in L e vanno verso R e che portano flusso (perché su di un arco o non c'è flusso o il flusso è 1).
- Questi k archi portano flusso 1 a nodi distinti di R .
 - Infatti, da ogni nodo in R parte poi un unico arco (verso t) di capacità 1 e per la conservazione del flusso al più una unità di flusso può arrivare al nodo in R .
- esiste dunque un abbinamento tra k nodi in L che mandano flusso 1 e k nodi in R che ricevono flusso 1. A ciascuno di questi abbinamenti corrisponde un arco in G . **Esiste dunque in G un abbinamento M di cardinalità k .**



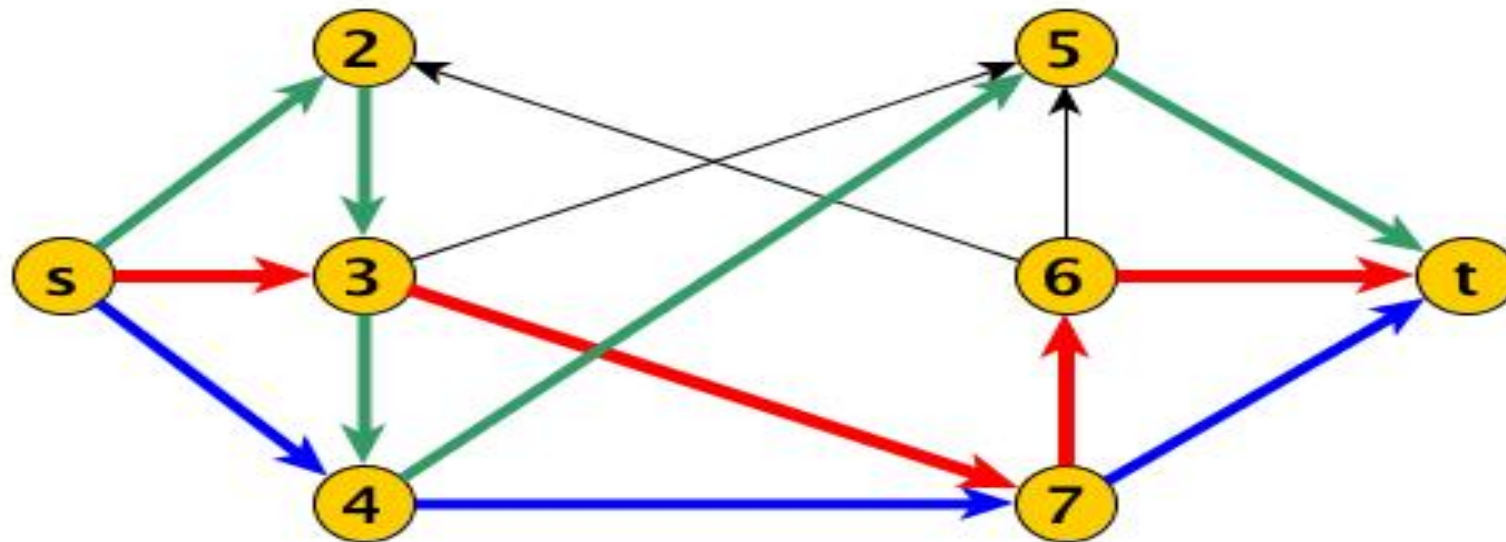
DEF. Due cammini di un grafo G si dicono arco-disgiunti se non hanno archi in comune.



In figura i cammini $(1, 3, 4, 6, 5)$ e $(4, 2, 6, 7, 3)$ sono arco disgiunti.

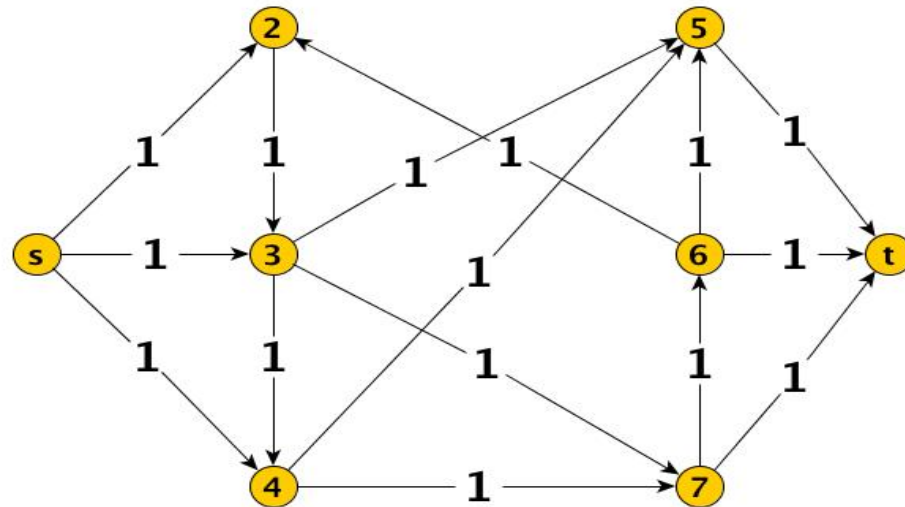
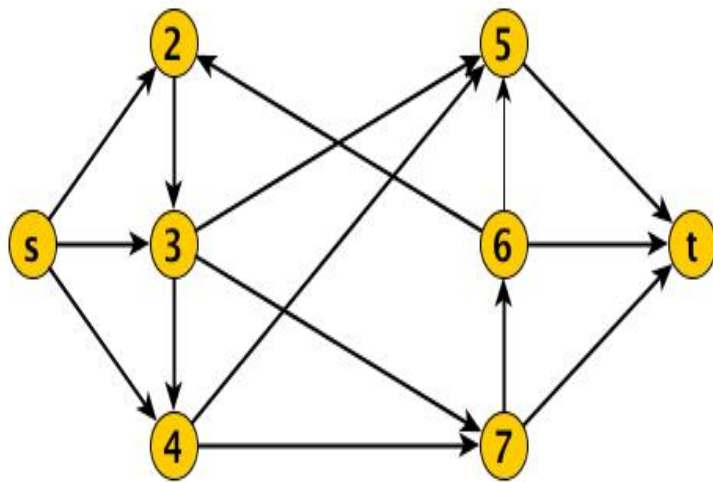
Il problema dei cammini disgiunti. Dato un grafo diretto G e due nodi s e t , vogliamo determinare il numero massimo di cammini arco-disgiunti che vanno da s a t .

Il problema è di fondamentale importanza nell'ambito delle reti di comunicazione.

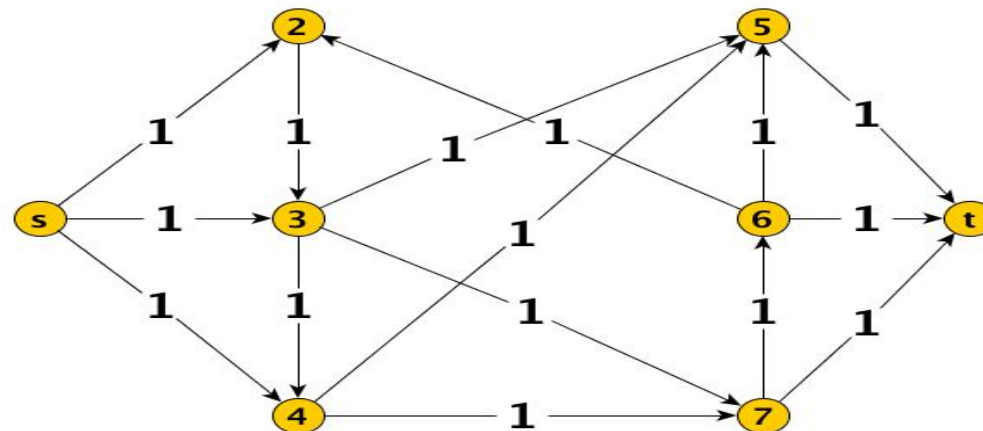
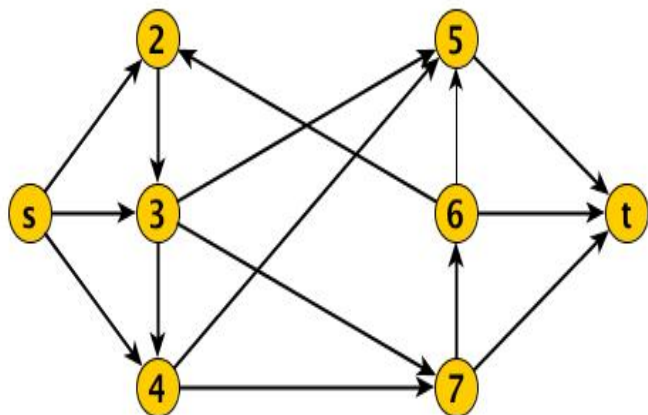


In figura tre cammini arco-disgiunti che vanno dal nodo s al nodo t (evidenziati con diversi colori).

Possiamo formulare il problema in termini di flusso massimo:
Basta assegnare capacità 1 ad ogni arco del grafo.



- A sinistra un grafo diretto G con i due nodi s e t per cui voglio determinare i cammini arco disgiunti ed a destra la rete G' che gli corrisponde.
- Abbiamo assunto che in G il nodo s non ha archi entranti e il nodo t non ha archi uscenti. Archi di questo tipo non possono appartenere a cammini (semplici) arco-disgiunti da s a t .



- Dimostreremo il seguente risultato:

**il massimo numero di cammini arco-disgiunti da s a t
nel grafo G**

=

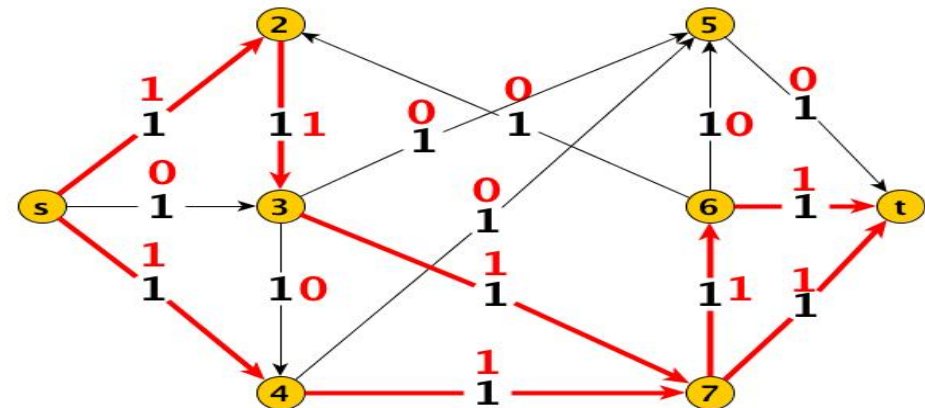
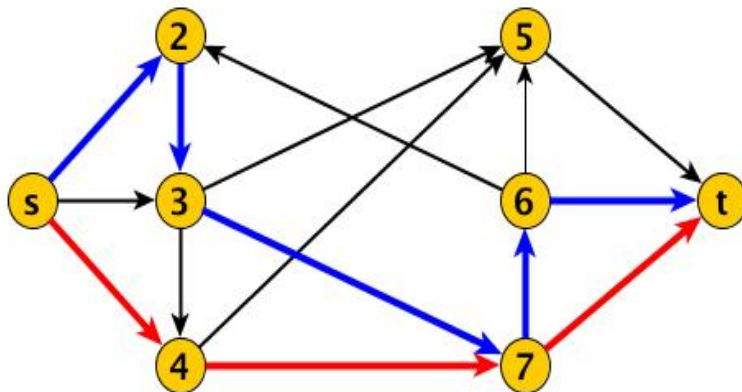
il valore del flusso massimo nella rete G'

- Il problema dei cammini disgiunti in un grafo G con n nodi ed m archi è dunque risolvibile in tempo $O(mn)$
 - Scomponiamo il lavoro da fare in due parti: trovare il flusso massimo e poi determinare i cammini:
 - * La ricerca del flusso massimo con l'algoritmo di Ford-Fulkerson richiede tempo $O(m \cdot v(f^*))$ dove f^* è il flusso massimo il cui valore, in questo caso, non può superare il grado uscente di s . **Questa prima fase costa dunque $O(mn)$.**
 - * Una volta trovato il valore del massimo flusso occorre trovare i cammini su cui viaggia il flusso (pari a 1). Ciascuno di questi cammini può essere trovato in tempo $O(m)$ (seguendo gli archi con flusso 1 e osservando che ogni cammino ha lunghezza al più m). I cammini arco-disgiunti sono al più n . **Quindi anche questa fase costa $O(mn)$.**

il massimo numero di cammini arco-disgiunti da s a t nel
 grafo G
 $\leq$
 il valore del flusso massimo nella rete G'

Prova.

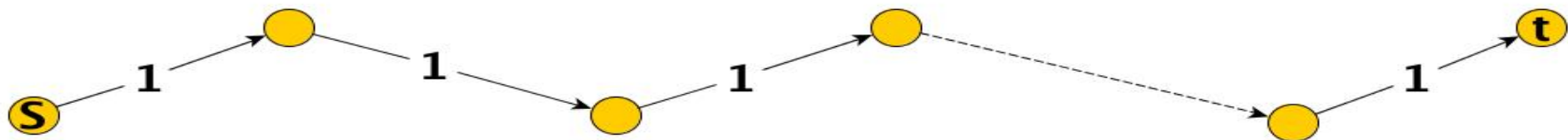
- Supponiamo che in G esistano k cammini arco-disgiunti.
- Costruiamo un flusso f per G come segue:
 - per ogni arco e di G poniamo $f(e) = 1$ se e appartiene ad uno dei k cammini ($f(e) = 0$ altrimenti)
 - f soddisfa i vincoli sulle capacità ($0 \leq f(e) \leq c(e) = 1$). Anche i vincoli sulla conservazione del flusso sono rispettati: se in un nodo u (che non sia s o t) entrano x dei cammini arco-disgiunti, altrettanti ne escono (perché gli x cammini sono arco-disgiunti) quindi il flusso entrante in u sarà pari al flusso uscente (e varrà x)
- per il flusso f si ha $v(f) = k$ (infatti i nodi uscenti da s con flusso 1 saranno esattamente k)



**il valore del flusso massimo nella rete G'
 $\leq$ il massimo numero di cammini arco-disgiunti da s a t
nel grafo G**

Prova.

- **Sia f il flusso massimo nella rete G' e sia $v(f) = k$.**
- **Poiché le capacità in G' sono interi possiamo assumere che k è un intero e che per ogni e vale $f(e) \in \{0, 1\}$.**
- **a partire da f possiamo ricavare k cammini arco-disgiunti in G che portano da s a t come segue:**
 - Iniziamo col seguire gli archi con flusso 1 che partono da s . Per il vincolo sulla conservazione del flusso ogni volta che un tale arco entra in un nodo, ne deve poi uscire attraversando un arco con flusso 1. Il cammino terminerà quando si arriva al nodo t .
 - Azzerando il flusso sugli archi di tale cammino otterremo in G' un flusso f' con $v(f') = k - 1$.
 - A partire da f' possiamo ricavare un nuovo cammino da s a t seguendo (sempre a partire da s) gli archi con flusso pari a 1. **Il nuovo cammino è arco-disgiunto dal precedente** (perché non attraverseremo mai gli archi del cammino precedente il cui flusso è stato posto a zero).
 - azzerando il flusso sugli archi di questo secondo cammino ci ritroviamo con un flusso che vale $v(f) - 2$ e possiamo iterare il procedimento alla ricerca di un terzo cammino (arco-disgiunto rispetto ai precedenti).
 - Ad ogni iterazione scopriamo un nuovo cammino e il flusso della rete si decrementa di 1. Questo procedimento permette dunque di ottenere k cammini arco-disgiunti per G (dopodiché ci si ritrova con un flusso pari a $v(f) - k = 0$).



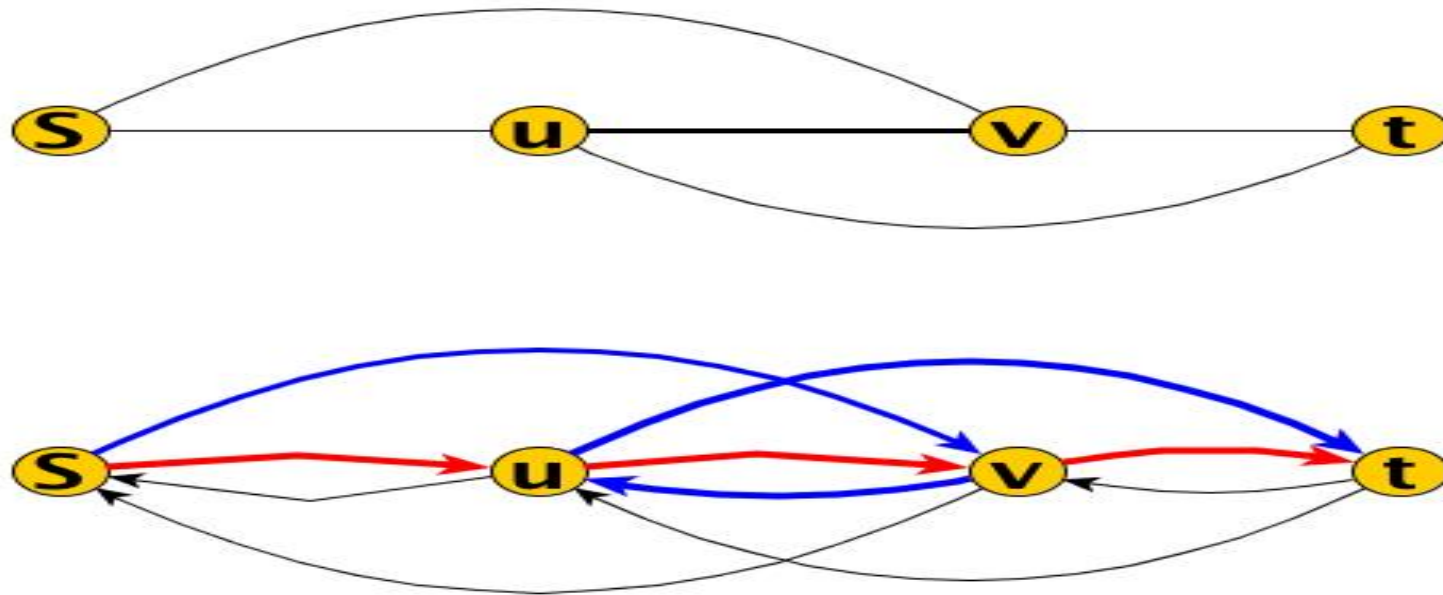
Trovare il massimo numero di cammini arco-disgiunti in grafi non diretti

- Possiamo usare un trucco. Partendo dal grafo G (non diretto) rimpiazziamo ciascun arco $\{u, v\}$ con la coppia di archi diretti (u, v) e (v, u) come in figura



- sul grafo (diretto) G' così ottenuto applichiamo poi l'algoritmo visto per la ricerca dei cammini arco-disgiunti.
- **Bisogna fare attenzione perché non è detto che due cammini arco-disgiunti in G' lo siano poi anche in G .**

ESEMPIO:



- nel grafo diretto G' ottenuto dal grafo (non diretto) G sono evidenziati in blu e in rosso due cammini arco-disgiunti (il cammino $P_1 = (s, u, v, t)$ e il cammino $P_2 = (s, v, u, t)$).
- in G questi due cammini non sono arco-disgiunti (entrambi attraversano l'arco $\{u, v\}$)

Per risolvere il problema **bisogna ottenere cammini diretti arco-disgiunti che corrispondano a cammini non-diretti arco disgiunti.**

Perché ciò accada è necessario e sufficiente che il flusso massimo di valore k da cui si parte per ottenere i k cammini diretti arco-disgiunti abbia la proprietà che:

in G' , per ogni coppia di archi (u, v) e (v, u) , al più uno di questi due archi avrà flusso diverso da zero.

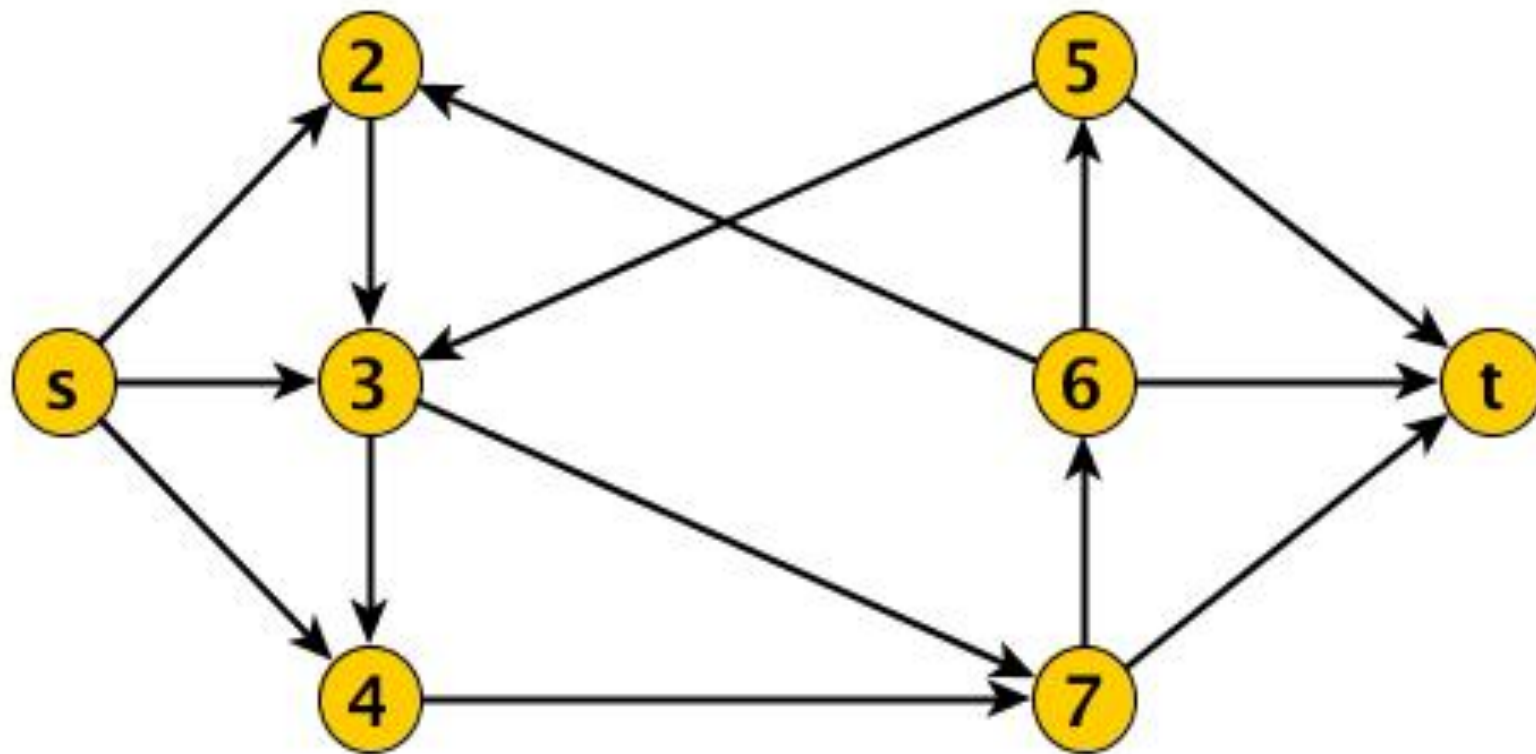
In questo modo al più uno, dei due archi diretti (u, v) e (v, u) apparterrà a cammini diretti arco-disgiunti e i cammini diretti-arco disgiunti risulteranno arco-disgiunti anche in G (dove la direzione con cui un arco viene attraversato non conta).

- Fortunatamente non è difficile, a partire da un flusso massimo f per G' ottenerne un altro dello stesso valore e con in più la proprietà che ci interessa:
- Basta iterare la seguente procedura:
 - **se esiste una coppia di archi (u, v) e (v, u) con $f(u, v) = f(v, u) = 1$ definisci una nuova assegnazione di flusso che differisce da f sui soli archi (u, v) e (v, u) dove il flusso viene posto a zero.**
- ad ogni passo dell'iterazione i vincoli di capacità e di conservazione vengono conservati inoltre il valore del flusso non cambia. Al termine della procedura avremo un flusso f' da cui far ripartire l'algoritmo per la ricerca dei cammini arco-disgiunti.

Il problema della connettività di grafi. Dato un grafo diretto G e due suoi nodi s e t , vogliamo trovare il minimo numero di archi che disconnette s da t .

DEF. Dato il grafo $G = (V, E)$ Un insieme di archi $F \subseteq E$ disconnette s da t se tutti i cammini da s a t usano almeno un arco in F .

Il problema ha moltissime applicazioni, ad esempio è utile per l'analisi alla tolleranza ai guasti di reti di calcolatori



- Nel grafo in figura il minimo numero di archi in grado di disconnettere s da t è 2 ($F = \{(3, 7), (4, 7)\}$)

- Dimostreremo il seguente risultato:

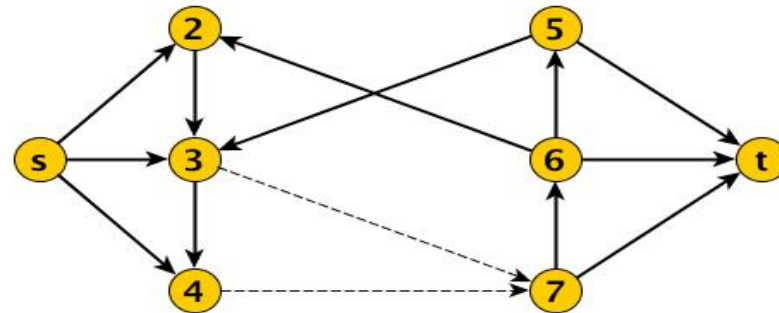
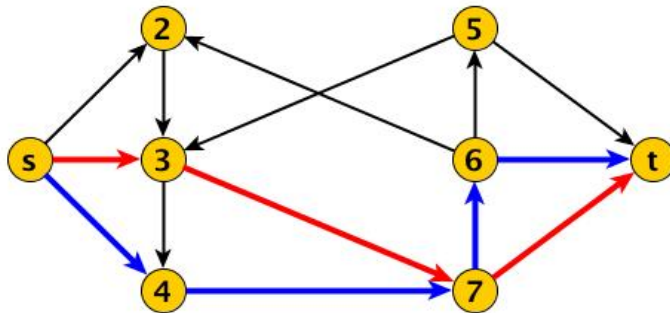
il minimo numero di archi che disconnette s da t in G
=
il massimo numero di cammini arco-disgiunti da s a t
in G

- Che ci fornisce anche un algoritmo per il problema della connettività di complessità $O(mn)$
 - basta calcolare il flusso massimo nella rete G' costruita a partire dal grafo G assegnando a tutti gli archi capacità 1.

il minimo numero di archi che disconnette s da t in G
 $\leq$
il massimo numero di cammini arco-disgiunti da s a t in G

Prova:

- Sia k il massimo numero di cammini arco-disgiunti da s a t in G .
- Sappiamo che k coincide con il valore del massimo flusso f della rete che si ottiene assegnando capacità 1 a tutti gli archi di G .
- per il teorema-massimo flusso minimo-taglio esiste quindi nella rete un taglio (A, B) per la cui capacità vale $C(A, B) = v(f) = k$.
- Gli archi che vanno da A a B sono esattamente k (perché 1 è la capacità di ogni arco di G).
- Questi k archi costituiscono un insieme in grado di sconnettere s da t .
- L'insieme F di minima cardinalità in grado di sconnettere s da t ha cardinalità al più k .

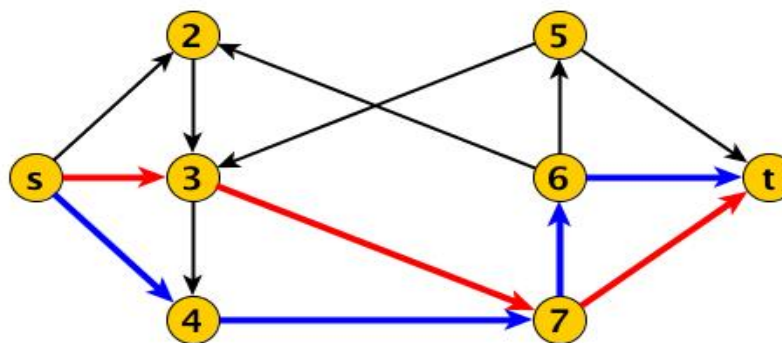
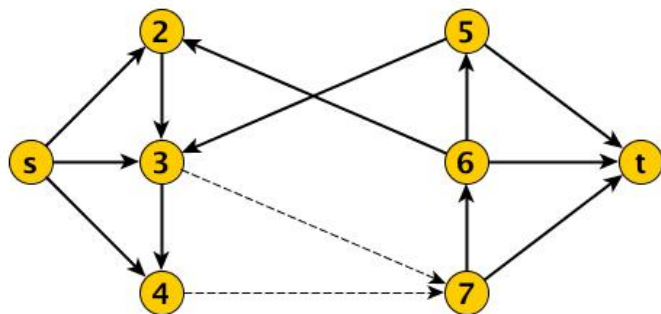


- Nel grafo G dell'esempio, ai 2 cammini arco-disgiunti da s a t corrisponde il taglio minimo con $A = \{s, 3, 4\}$ che ha capacità 2.
 Dal taglio minimo ricaviamo l'insieme $F = \{(3, 7), (4, 7)\}$

il massimo numero di cammini arco-disgiunti da s a t in G
 $\leq$
il minimo numero di archi che disconnette s da t in G

Prova:

- Sia $F \subseteq E$ un insieme di minima cardinalità k che disconnette s da t .
- ogni cammino da s a t deve usare almeno un arco di F (altrimenti F non disconetterebbe s da t)
- il massimo numero di cammini arco-disgiunti da s a t è al più k .



- Nel grafo G dell'esempio due archi bastano a disconnettere s da t nel grafo e abbiamo due cammini arco-disgiunti da s a t .