

NOME	COGNOME
------	---------

**Esercizio 1.** Considerate il seguente problema di minimizzazione, che chiameremo *minimo flusso con lower bound*, analogo al problema del calcolo del massimo flusso.

Sia  $G = (V, E)$  un grafo orientato con sorgente  $s$  e pozzo  $t$ . Sia inoltre  $\ell(a, b)$  un intero positivo associato all'arco  $(a, b) \in E$ :  $\ell(a, b)$  rappresenta una *delimitazione inferiore* (lower bound) al flusso che deve passare sull'arco  $(a, b)$ . In altre parole, un flusso ammissibile  $f$ , oltre a soddisfare la conservazione del flusso su tutti i nodi (tranne  $s$  e  $t$ ), deve anche essere tale che

$$f(a, b) \geq \ell(a, b)$$

per ogni arco  $(a, b) \in E$ . Il problema del minimo flusso con lower bound richiede di calcolare un flusso ammissibile avente il più piccolo valore possibile.

Osserviamo che non c'è alcuna delimitazione superiore al flusso che può passare sugli archi. In questo problema assumeremo comunque che i lower bound  $\ell$  siano tutti finiti e ci interesseremo di flussi di valore finito.

L'esercizio, in sintesi, richiede di dimostrare che è possibile calcolare un minimo flusso con lower bound in tempo polinomiale. A tale scopo, rispondete alle seguenti domande:

1. Proponete un semplice algoritmo con tempo di esecuzione polinomiale che sia in grado di calcolare un flusso  $f'$  ammissibile (ma non necessariamente di valore minimo).
2. Dato un flusso ammissibile  $f'$ , considerate un *grafo degli eccessi*  $\widehat{G}$  in cui la capacità  $u(a, b)$  di un arco  $(a, b)$  è pari a

$$u(a, b) = f'(a, b) - \ell(a, b)$$

Dimostrate che se  $x$  è un flusso in  $\widehat{G}$  secondo la definizione standard, allora  $f = f' - x$  è un flusso con lower bound ammissibile in  $G$ .

3. Dimostrate che se  $x$  è un flusso massimo in  $\widehat{G}$  (secondo la definizione standard), allora  $f = f' - x$  è un minimo flusso con lower bound in  $G$ .
4. Dimostrate per questo problema un teorema di min flow - max cut (analogo al teorema di max flow - min cut visto per il problema di massimo flusso standard).

**Esercizio 2.** Descrivete l'algoritmo di Floyd-Warshall, discutendone l'implementazione e dimostrando formalmente la correttezza e il tempo di esecuzione.

In bocca al lupo!

ALGORITI (A.A. 2006-2007)

DOCENTE: IRENE FINOCCHI

APPELLO DEL 19 GIUGNO 2007

NOME	COGNOME
------	---------

**Soluzione esercizio 1:**

ALGORITI (A.A. 2006-2007)

DOCENTE: IRENE FINOCCHI

APPELLO DEL 19 GIUGNO 2007

NOME	COGNOME
------	---------

ALGORITI (A.A. 2006-2007)

DOCENTE: IRENE FINOCCHI

APPELLO DEL 19 GIUGNO 2007

NOME	COGNOME
------	---------

ALGORITI (A.A. 2006-2007)

DOCENTE: IRENE FINOCCHI

APPELLO DEL 19 GIUGNO 2007

NOME	COGNOME
------	---------

**Soluzione esercizio 2:**

ALGORITI (A.A. 2006-2007)

DOCENTE: IRENE FINOCCHI

APPELLO DEL 19 GIUGNO 2007

NOME	COGNOME
------	---------