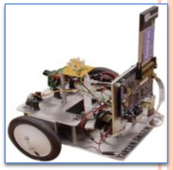
IL PROBLEMA DEL DISPIEGAMENTO CENTRALIZZATO DI SENSORI MOBILI OVVERO L'ACCOPPIAMENTO PERFETTO DI PESO MINIMO

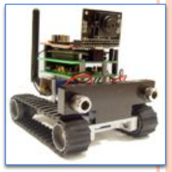
Prof. Tiziana Calamoneri
Corso di Algoritmi per le reti
A.A. 2010/11

IL PROBLEMA

SENSORI MOBILI

- Dispositivi di piccola dimensione e basso costo (~150 $)
- Unità di monitoraggio (sensing)
- Unità rice/trasmissiva
- Piccola batteria
- Sistema di locomozione





Sono particolarmente utili in ambienti critici (ad esempio: in presenza di incendi, di esalazioni tossiche, di campi minati, …)

Data un'area (AoI) da coprire:

IL PROBLEMA (1)

Algoritmo di coordinamento dei dispositivi

Config. iniziale → Config. desiderata

può essere:
- casuale
- da una postazione sicura

può essere:
- tassellazione regolare
- qualunque altra cosa purché l'area sia coperta

IL PROBLEMA (2)

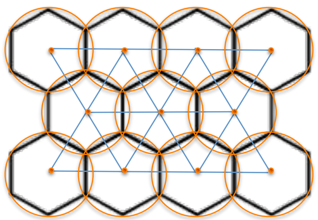
- Lo scopo è raggiungere la copertura dell'AoI (stato di equilibrio o finale).
- Allo stesso tempo, vanno ottimizzati diversi parametri:
  - Distanza percorsa
  - Numero di mosse (start/stop)
  - Costo di comunicazione
  - Costo di computazione

IL PROBLEMA (3)

- Distanza percorsa:
  - È il costo dominante
- Numero di mosse
  - Gli start/stop sono più costosi del movimento continuo
- Costo di comunicazione
  - Dipende dal numero di messaggi e dalla dimensione dei pacchetti ad ogni trasmissione
- Costo di computazione
  - Usualmente trascurabile, a meno che non si usino dei processi molto sofisticati

IL PROBLEMA (4)

E' ben noto che la copertura ottima tramite cerchi tutti della stessa dimensione è quella che posiziona i centri in forma di griglia triangolare di dimensione opportuna (√2 r).



IL PROBLEMA (5)

- Vogliamo garantire la copertura assegnando ciascun sensore ad una posizione della griglia
- Vogliamo minimizzare l'energia consumata
- Trasformiamo nel classico problema dell'accoppiamento perfetto di peso minimo
- N.B. Funziona solo per una soluzione centralizzata, in cui sia nota l'AoI e la posizione iniziale di ciascun sensore

Il Modello del Problema su Grafi

9

Il Modello su Grafi (1)

- Riformuliamo il problema:
- Insieme di n sensori mobili $S=\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$
- Insieme di p locazioni sull'AoI $L=\{L_1, L_2, \ldots, L_p\}$
- $n \geq p$ (per garantire la copertura)
- Per ciascun S_i, determinare la locazione L_j che dovrà raggiungere, in modo da minimizzare l'energia totale spesa.

10

Il Modello su Grafi (2)

- Costruiamo un grafo bipartito pesato $G=(S \cup L, E, w)$ come segue:
  - per ogni sensore S_i si costruisce un nodo
  - per ogni punto del piano L_j si costruisce un nodo
  - si congiunge S_i con L_j tramite un arco per ogni i e j
  - si definisce la funzione peso $w(e_{ij})$ come un valore proporzionale al dispendio di energia necessario al sensore S_i per raggiungere la posizione L_j
  - si vuole scegliere l'accoppiamento di sensori/posizioni che minimizzi il dispendio energetico

11

L'Accoppiamento Perfetto in Grafi Bipartiti

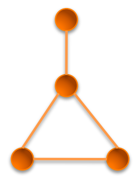
12

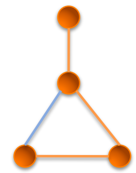
Accoppiamento (1)

- **Def**. Un accoppiamento è un insieme di archi $M \subseteq E$ tale che nessun nodo è estremo di più di un arco di M.
- Accoppiamento Massimale
  - Non esiste alcun $e \notin E$ tale che $M \cup \{e\}$ sia un accoppiamento
- Accoppiamento Massimo
  - Accoppiamento con $|M|$ il più grande possibile
- Accoppiamento Perfetto
  - $|M| = n/2$: ogni nodo è estremo di un arco in M.

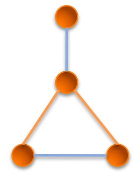
Accoppiamento (2)

Esempio





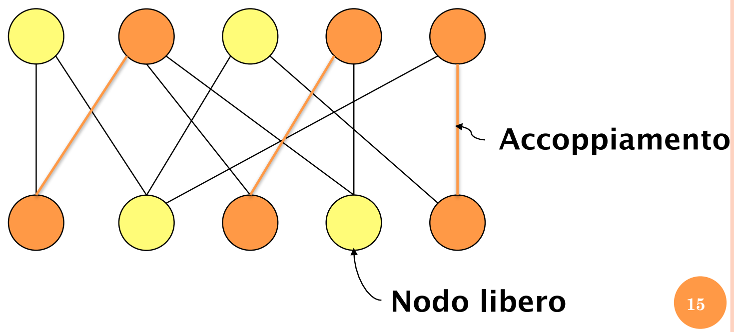
accoppiamento massimale



accoppiamento massimo

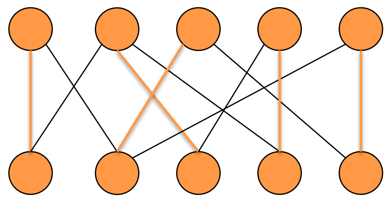
Accoppiamento (3)

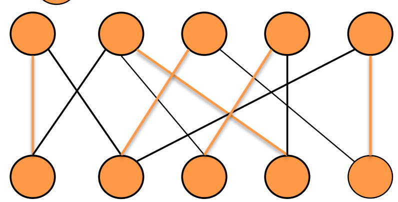
- Nomenclatura



Accoppiamento (4)

- N.B. L'accoppiamento massimo non è unico





Accoppiamento (5)

Problema originale: Problema dei matrimoni

- I nodi di un insieme rappresentano gli uomini
- I nodi dell'altro insieme le donne
- Un arco unisce una coppia che si piace

- L'accoppiamento massimo cerca di massimizzare il numero di coppie

Problemi di Accoppiamento

- Dato un grafo G, trovare un:
  - Accoppiamento Massimale: facile (greedy)
  - Accoppiamento Massimo
    - Tempo polinomiale; non facile.
    - Caso importante più facile: grafi bipartiti
  - Accoppiamento Perfetto
    - Caso particolare di accoppiamento massimo
    - Esistono teoremi appositi

Accoppiamento Massimo Bip. (1)

- **TH.** *(di P. Hall) G bipartito con $|V_1| \leq |V_2|$, allora G ha un accoppiamento perfetto sse per ogni insieme S di k nodi di V_1 vi sono almeno k nodi di V_2 adiacenti ad un nodo di S.*

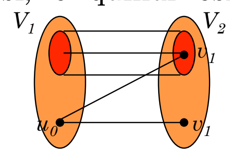
  In altre parole, $\forall S \subseteq V_1$, $|S| \leq |adj(S)|$.
- **DIM.** Condizione necessaria: Se G ha un accoppiamento perfetto M ed S è un qualsiasi sottoinsieme di V_1, allora ogni nodo in S è accoppiato da M con un differente nodo in $adj(S)$, segue che $|S| \leq |adj(S)|$.

Accoppiamento Massimo Bip. (2)

- *(segue dim. del th. di Hall) G bipartito con $|V_1| \leq |V_2|$, allora G ha un accoppiamento perfetto sse $\forall S \subseteq V_1$, $|S| \leq |adj(S)|$.*
- **DIM.** Condizione sufficiente: Se è verificata la condizione di Hall esiste un accoppiamento perfetto. Per assurdo non esista, cioè sia M un accoppiamento massimo, con $|M| < |V_1|$; dimostriamo che esiste un accoppiamento M' con $|M'| = |M| + 1$. Per ipotesi, $|M| < |V_1| \Rightarrow \exists\, u_0 \in V_1$ t.c. $u_0 \notin M$. Sia $S = \{u_0\}$ e vale che $1 = |S| \leq |adj(S)|$ per ipotesi, e quindi esiste un nodo $v_1 \in V_2$ adiacente ad u_0.

a. $v_1 \notin M$

b. $v_1 \in M$



ACCOPPIAMENTO MASSIMO BIP. (3)

(segue c.s.. del th. di Hall) G bipartito con $|V_1| \leq |V_2|$, *allora G ha un accoppiamento* perfetto *sse* $\forall\ S \subseteq V_1$, $|S| \leq |adj(S)|$.

a. Se $v_1 \notin M$ fine

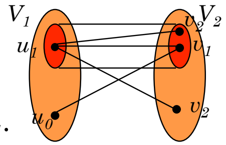
b. Consideriamo l'accoppiato di v_1 *in* M, u_1.

$S=\{u_0,u_1\}$ e $2=|S| \leq |adj(S)|$.

Deve esistere un altro nodo v_2, distinto da v_1, e adiacente ad u_0 o ad u_1.

a. $v_2 \notin M$

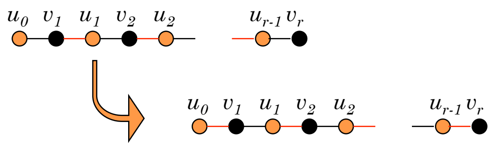
b. $v_2 \in M$



ACCOPPIAMENTO MASSIMO BIP. (4)

(segue c.s.. del th. di Hall) G bipartito con $|V_1| \leq |V_2|$, *allora G ha un accoppiamento perfetto sse* $\forall\ S \subseteq V_1$, $|S| \leq |adj(S)|$.

Continuando in questo modo, per la finitezza del grafo, si arriva necessariamente ad un nodo v_r che non appartiene ad M. Ognuno dei nodi v_i è adiacente ad almeno uno tra $u_0, u_1, \ldots, u_{i-1}$. Come nel caso $r=2$ si ha:



ACCOPPIAMENTO MASSIMO BIP. (5)

COR. *G bipartito k-regolare con* $|V_1|=|V_2|$, *allora G ha k accoppiamenti perfetti.*

DIM. Sia S un sottinsieme di V_1. *adj(S)* ha al più $k|S|$ nodi (se ciascun nodo in *adj(S)* ha grado *1* nel sottografo indotto da $S \cup adj(S)$) ed almeno $|S|$ nodi (se ciascun nodo in *adj(S)* ha grado k nel sottografo indotto da $S \cup adj(S)$). In tutti i casi la condizione di Hall è verificata, e quindi esiste un accoppiamento perfetto, che può essere rimosso dal grafo dando luogo ad un nuovo grafo *(k-1)*-regolare. Per esso possiamo ripetere il ragionamento. **CVD**

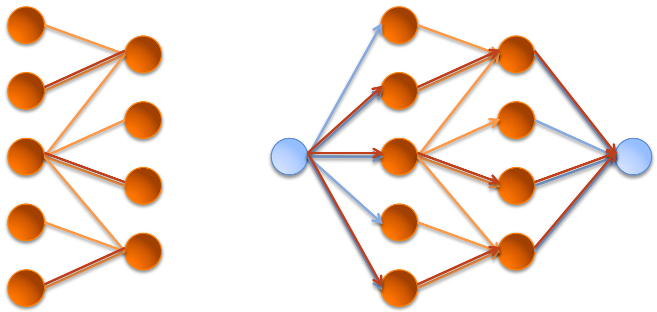
ACCOPPIAMENTO MASSIMO BIP. (6)

- Il teorema di P. Hall non fornisce un metodo algoritmico per costruire un accoppiamento perfetto.
- Il problema dell'accoppiamento massimo in un grafo bipartito è equivalente al problema del massimo flusso in una rete.
- Dato $G=(V=V_1 \cup V_2, E)$, crea una rete di flusso $G'=(V', E')$ in cui i flussi corrispondono all'accoppiamento nel grafo originale:
  - Dalla sorgente s ai nodi in V_1: $\{(s,u) \mid u \in V_1\}$
  - Da u in V_1 a v in V_2: $\{(u,v) \mid u \in V_1, v \in V_2, e\ (u,v) \in E\}$
  - Dai nodi in V_2 al pozzo t: $\{(v,t) \mid v \in V_2\}$
  - Capacità: $c(u,v) = 1$, for all $(u,v) \in E'$

Accoppiamento Massimo Bip. (7)

- Fatto: Sia M un accoppiamento in un grafo bipartito G. Allora esiste un flusso f della rete G' t.c. $|M|=|f|$.

  Viceversa, se f è un flusso di G' allora esiste un accoppiamento M in G t.c. $|M|=|f|$.



Accoppiamento Massimo Bip. (8)

- Th: (dell'integralità) *Se la capacità c assume solo valori interi, allora il flusso massimo f ha la proprietà che* $|f|$ *è un valore intero. Inoltre, per tutti i nodi u e v,* $f(u,v)$ *è un intero.*
- Corol.: *La cardinalità di un accoppiamento massimo M in un grafo bipartito G è uguale al valore di un flusso massimo f nella rete associata G'.*

Accoppiamento Massimo Bip. (9)

Dim. del Corol.: *La cardinalità di un accoppiamento massimo M in un grafo bipartito G è uguale al valore di un flusso massimo f nella rete associata G'.*

Sia M massimo e, per assurdo, f non sia massimo.

Allora esiste f' t.c. $|f'|>|f|$.

Per il th. dell'integralità, f' ha valori interi e quindi, per il fatto, gli corrisponde un accoppiamento M'.

$|M'|=|f'|>|f|=|M|$. Quindi M non è massimo.

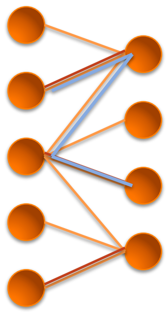
Analogamente, si dim. che se f è massimo allora anche M è massimo. CVD

Accoppiamento Massimo Bip. (10)

- L'algoritmo di Ford-Fulkerson per il massimo flusso in una rete ha complessità $O(m|f|)$.
- Il flusso di G' ha al massimo cardinalità pari a $min\{|V_1|, |V_2|\}$. Quindi, la complessità di un eventuale algoritmo che sfrutta il flusso massimo è $O(nm)$.

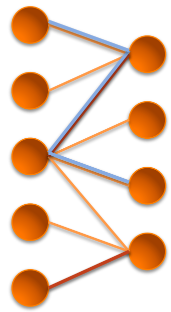
Accoppiamento Massimo Bip. (11)

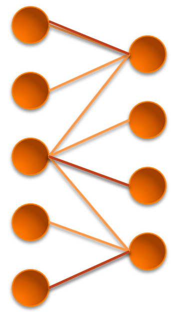
- Def. Dato un accoppiamento M in un grafo G, un cammino alternante rispetto ad M è un cammino che alterna archi dell'accoppiamento ad archi che non sono nell'accoppiamento.



Accoppiamento Massimo Bip. (12)

- Def. Dato un accoppiamento M in un grafo G, un cammino aumentante rispetto ad M è un cammino alternante che inizia e termina in due nodi liberi dall'accoppiamento.





Dopo lo scambio degli archi dello accoppiamento con gli altri nel cammino aumentante, lo accoppiamento ha aumentato la sua cardinalità.

Accoppiamento Massimo Bip. (13)

- Th. (del Cammino Aumentante) [Berge 1975] *M è un accoppiamento massimo se e solo se non esiste alcun cammino aumentante rispetto ad M.*
- Dim. (➔) M massimo allora non ci sono cammini aumentanti. Negando, se ci sono cammini aumentanti, allora M non è massimo. Questo è ovvio, perché posso scambiare gli archi nel cammino ed accrescere M.

Accoppiamento Massimo Bip. (14)

(Segue dim. del Th. *M è un accoppiamento massimo se e solo se non esiste alcun cammino aumentante rispetto ad M.)*

- Dim. (🡐) Non esistono camm. aumentanti, allora M massimo.

  Per assurdo M non è massimo. Sia M' t.c. $|M'|>|M|$.

  Si consideri il grafo H indotto da M ed M' dove gli archi che sono sia in M che in M' sono rappresentati 2 volte. Quindi H è un multigrafo.

Accoppiamento Massimo Bip. (15)

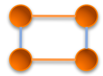
Segue dim. Del Th. *M è un accoppiamento massimo se e solo se non esiste alcun cammino aumentante rispetto ad M.*

- *H* ha la proprietà:
  - Per ogni *v* in *H*, *deg(v)≤2.* (ogni nodo ha al più un arco di *M* ed uno di *M'*)
- Segue che ogni componente connessa di H è un ciclo o un cammino.
  - cicli di lungh. pari, altrimenti esisterebbe un nodo estremo di due archi dello stesso accoppiamento (*M* o *M'*); assurdo per la def. di accoppiamento

Accoppiamento Massimo Bip. (16)

Segue dim. Del Th. *M è un accoppiamento massimo se e solo se non esiste alcun cammino aumentante rispetto ad M.*

- Più nel dettaglio, le componenti connesse di *H* possono essere di 6 tipi:

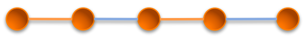
1. un nodo isolato 
2. un 2-ciclo 
3. un 2k-ciclo, k>1 

…

Accoppiamento Massimo Bip. (17)

Segue dim. Del Th. *M è un accoppiamento massimo se e solo se non esiste alcun cammino aumentante rispetto ad M.*

…

4. un 2k-cammino 
5. un (2k+1)-cammino i cui estremi sono incidenti ad *M* 
6. un (2k+1)-cammino i cui estremi sono incidenti ad *M'*