

**PARTE SECONDA:
RETI SENZA FILI
2.A. RETI AD HOC**

1

**IL PROBLEMA DELL'ASSEGNAZIONE
DI FREQUENZE
OVVERO
LA
 $L(h,k)$ -ETICETTATURA DI GRAFI**

2

**Prof. Tiziana Calamoneri
Corso di Algoritmi per le reti
A.A. 2012/13**



IL PROBLEMA (1)

In verità non esiste "il" problema dell'**Assegnazione di frequenze**.

L'assegnazione delle frequenze è una operazione necessaria in molti tipi di reti senza fili ma il problema ad essa correlato varia a seconda del tipo di rete.

In letteratura sono noti molti tipi di problemi di assegnazione di frequenze.

3

IL PROBLEMA (2)

Il rapido sviluppo di servizi senza fili (es. cellulari, smartphone, ...) hanno causato competizione per l'accesso alla risorsa principale: lo **spettro radio**, suddiviso in **frequenze**.

Come tutte le risorse scarsamente disponibili, il loro costo fa nascere la necessità di economizzare sulle frequenze disponibili.

Il riuso delle frequenze in una rete senza fili permette di risparmiare considerevolmente.

4

IL PROBLEMA (3)

Il riuso delle frequenze può tuttavia portare perdita di qualità.

L'uso della stessa frequenza (o quasi) in connessioni vicine causa infatti **interferenza** tra i segnali.

Il problema di assegnazione delle frequenze ha come scopo quello di risolvere questa contrapposizione tra il risparmio nel riuso delle frequenze e la perdita di qualità dovuta alle interferenze.

5

IL PROBLEMA (4)

Il problema delle assegnazioni delle frequenze è diverso a seconda degli scopi che il provider vuole raggiungere, del differente tipo di rete usato, e della particolare applicazione.

Indipendentemente da tutto ciò, una connessione senza fili viene stabilita sintonizzando trasmettente e ricevente sulla stessa frequenza.

Quale sia questa frequenza viene stabilito risolvendo un problema di assegnazione di frequenze.

6

IL PROBLEMA (5)

I problemi di assegnazione di frequenze hanno due aspetti basilari:

1. Bisogna assegnare delle frequenze ad un insieme di connessioni senza fili. Le frequenze vanno scelte tra quelle di un insieme dato che può dipendere da diversi fattori.
2. Le frequenze assegnate possono incorrere nel problema dell'interferenza, causando perdita di qualità al segnale.

7

IL PROBLEMA (6)

Condizioni necessarie perché si abbia interferenza:

- a) Le frequenze devono essere vicine sulla banda elettromagnetica (Doppler effects) o armoniche tra loro. Quest'ultimo effetto è tuttavia limitato poiché le bande a disposizione sono di solito sufficientemente piccole da non contenere armoniche
- b) Le connessioni devono essere geograficamente vicine.

8

IL PROBLEMA (7)

Entrambi gli aspetti sono modellati in tanti modi diversi quindi:

molti problemi di assegnazione di frequenza.

I vari modelli differiscono tra loro nel tipo di vincolo imposto per la scelta delle frequenze e negli obiettivi da ottimizzare.

Qui descriviamo un modello semplificato che è molto usato in letteratura.

9

IL PROBLEMA (8)

Banda di frequenza disponibile al provider $[f_{min}, f_{max}]$ partizionata in canali, tutti della stessa ampiezza Δ (bandwidth).

Non è restrittivo numerare i canali da 0 ad un certo numero σ , dove $\sigma = (f_{max} - f_{min}) / \Delta$.

I canali disponibili sono denotati con $D = \{0, 1, \dots, \sigma\}$.

Nel modello più generale, per particolari connessioni non tutti i canali in D sono disponibili. Per esempio, se la connessione si trova sul confine tra due Paesi, le regole tra di essi potrebbero portare ad un decremento dell'insieme: data una connessione v ,

$$D_v \subseteq D$$

10

IL PROBLEMA (9)

Su ogni canale si comunica dal trasmettente al ricevente. Per il traffico bidirezionale sono necessari due diversi canali, uno per ciascuna direzione. Nei modelli il secondo canale è quasi sempre ignorato.

Invece di $[f_{min}, f_{max}]$, due bande $[f_{min}^1, f_{max}^1]$ e $[f_{min}^2, f_{max}^2]$ di σ canali ciascuna: $\{0, \dots, \sigma\}$, e $\{s, \dots, \sigma+s\}$, dove $s \gg \sigma$.

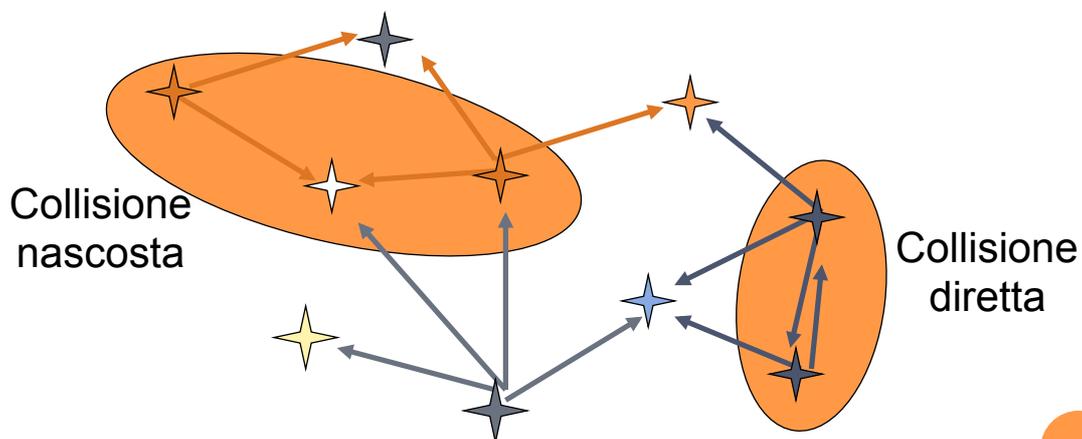
Se una connessione usa il canale i , l'altra userà il canale $i+s$.

Quindi la scelta del solo s previene interferenze tra comunicazioni nelle due direzioni.

11

IL PROBLEMA (10)

Nel nostro modello:



12

IL PROBLEMA (11)

Collisioni dirette: una stazione e le sue vicine devono avere frequenze a distanza almeno h affinché i loro messaggi non interferiscano

Collisioni nascoste: una stazione non può ricevere messaggi con frequenze simili (a distanza minore di k) dai suoi vicini, affinché questi siano ricevuti correttamente



Problema della $L(h,k)$ -Etichettatura

13

$L(h,k)$ -ETICHETTATURA (1)

Grafo delle interferenze

- un nodo per ogni stazione
- un arco tra due stazioni se esse possono interferire

f funzione di colorazione dei nodi t.c.

- $\forall u, v \in V \ |f(u) - f(v)| \geq h$ se $(u,v) \in E$

- $\forall u, v \in V \ |f(u) - f(v)| \geq k$ se $\exists w \in V$ t.c. $(u,w) \in E$
e $(w,v) \in E$

Obiettivo: minimizzare la banda $\sigma_{h,k}$

Minima banda: $\lambda_{h,k}$

14

$L(h,k)$ -ETICHETTATURA (2)

N.B. la condizione:

- $\forall u, v \in V \ |f(u) - f(v)| \geq k$ se $\exists w \in V$ t.c. $(u,w) \in E$
e $(w,v) \in E$

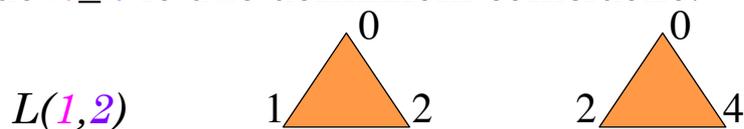
A volte in letteratura questa è scritta come:

- $\forall u, v \in V \ |f(u) - f(v)| \geq k$ se $\text{dist}(u,v)=2$

La prima condizione funziona sia per $h \geq k$ che per $h < k$.

Essa permette ad un triangolo di essere colorato con colori a distanza almeno $\max\{h,k\}$ anche se i suoi nodi sono a dist. 1.

Quando $h \geq k$ le due definizioni coincidono.



15

$L(h,k)$ -ETICHETTATURA (3)

Di solito il minimo colore usato è 0.

Quindi una $L(h,k)$ -etichettatura con span $\sigma_{h,k}(G)$ usa $\sigma_{h,k}(G)+1$ colori diversi.

Questo è leggermente antintuitivo, ma è usato per ragioni storiche.

Problema introdotto nei primi anni '90 con $h=2$ e $k=1$ in relazione al problema dell'assegnazione di frequenze

[Griggs e Yeh '92, Robertson '91]

Problema già noto in combinatoria nel caso $h=1$ e $k=1$ (colorazione del quadrato di un grafo).

[Wegner '77]

16

UN INCISO SULLA L(1,1)-ETICHETTATURA (1)

Nel caso $h=1$ e $k=1$ il problema è equivalente alla colorazione classica del quadrato di un grafo.

Dato un grafo G , il suo **quadrato** G^2 è definito come quel grafo che ha gli stessi nodi di G ed un arco tra due nodi u e v se e solo se:

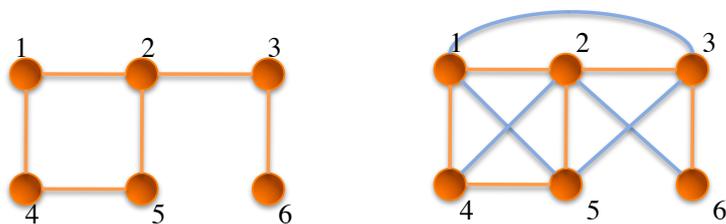
- o l'arco (u,v) è in G
- o u e v sono connessi da un cammino di lunghezza 2 in G



17

UN INCISO SULLA L(1,1)-ETICHETTATURA (2)

Se si utilizzano le matrici di adiacenza:



Calcoliamo $A(G)^2$:

$$(a_{ij})^2 = \sum_{k=1 \dots n} a_{ik} a_{kj}$$

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(G^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(G)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(a_{ij})^2 = x$ sse ci sono x cammini di lunghezza 2 tra i e j .

Per unificare le conoscenze a distanza 1 e 2: $A(G)^2 + A(G) \rightarrow A(G^2)$

18

$L(h,k)$ -ETICHETTATURA (4)

Dalla sua definizione, la $L(h,k)$ -etichettatura è stata usata per modellare vari problemi:

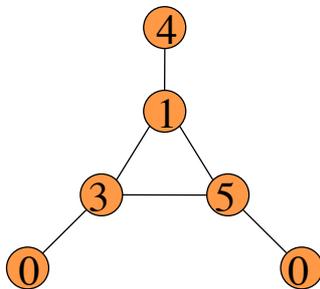
- una specie di assegnazione di un “codice di controllo” in packet radio networks per evitare collisioni ($L(0,1)$ -etichettatura)
- un’assegnazione di canali in optical cluster based networks ($L(0,1)$ – o $L(1,1)$ -etichettatura a seconda che i clusters contengano uno o più nodi)
- vari problemi di assegnazione di canali, dove i canali sono definiti come frequenze, time slots, codici, ecc.

$L(h,k)$ -etichettatura studiata in molti ambiti (teoria dei grafi, combinatoria, ricerca operativa, algoritmi genetici, reti neurali, ...)

19

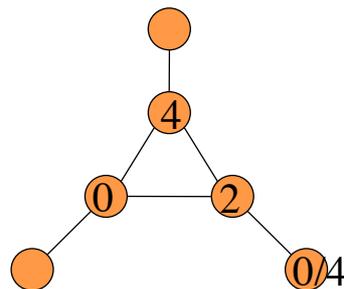
$L(h,k)$ -ETICHETTATURA (5)

Esempio: calcoliamo la $L(2,1)$ -etichettatura di:



$$\lambda_{2,1} \leq 5$$

$$\lambda_{2,1} = 5: \text{p.a.}$$



!!!

20

L(h,k)-ETICHETTATURA (6)

Lemma: $\lambda_{dh,dk} = d \lambda_{h,k}$

Dim. In due parti: $\lambda_{dh,dk} \geq d \lambda_{h,k}$ e $\lambda_{dh,dk} \leq d \lambda_{h,k}$.

1. $\lambda_{dh,dk} \geq d \lambda_{h,k}$

Sia f una $L(dh, dk)$ -etichett. . Definiamo $f' = f/d$.

f' è una $L(h, k)$ -etichettatura e

$$\lambda_{dh,dk}/d = \sigma_{h,k}(f') \geq \lambda_{h,k}.$$

2. $\lambda_{dh,dk} \leq d \lambda_{h,k}$

Similmente, sia f una $L(h, k)$ -etichettatura. Definiamo $f' = fd$.

f' è una $L(dh, dk)$ -etichettatura e

$$\lambda_{dh,dk} \leq \sigma_{dh,dk}(f') = d \lambda_{h,k}.$$

CVD

Segue che ci si può ridurre a valori di h e k primi tra loro.

PROBLEMA: e se $f' = f/d$ non produce valori interi?

21

L(h,k)-ETICHETTATURA (7)

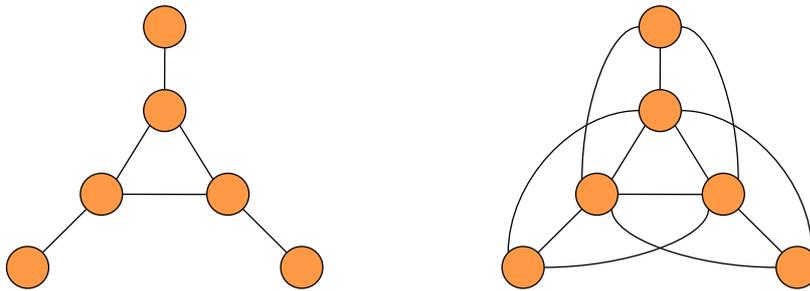
Lemma: Siano $x, y \geq 0$, $d > 0$ e k in Z^+ . Se $|x-y| \geq k$, allora $|x'-y'| \geq k$, dove $x' = \lfloor x/d \rfloor d$ e $y' = \lfloor y/d \rfloor d$

Ne consegue che possiamo restringere la nostra attenzione alle $L(h, k)$ -etichettature in cui h e k sono primi tra loro e i cui valori siano tutti interi.

22

$L(h,k)$ -ETICETTATURA (8)

- Il caso $k=0$, per qualunque h , non è considerato come $L(h,k)$ -etichettatura perché diviene il classico vertex coloring
- Il caso $h=k$ è molto studiato come vertex coloring del quadrato di un grafo.
- Il caso $h=2k$ è il più diffuso.



23

RISULTATI DI NP-COMPLETEZZA (1)

La vers. decisionale è NP-completa anche per i più piccoli valori di h e k :

$L(0,1)$ -etich. di grafi planari

[Bertossi, Bonuccelli '95]

$L(1,1)$ -etich. di grafi generali, planari, con grado limitato e unit-disk

[McCormick '83], [Ramanathan, Loyd '92],
[Ramanathan '93], [Sen, Huson '97]

24

RISULTATI DI NP-COMPLETEZZA (2)

$L(2,1)$ -etich. di grafi con diam. 2 [Griggs, Yeh '92]

DIM. Consideriamo la seguente forma speciale del problema:

DL. Istanza: $G=(V,E)$ di diam. 2

Domanda: $\lambda_{2,1}(G) \leq |V|$?

Porta elementi
distinti del dominio
in elementi distinti
del codominio

IDL. Istanza: $G=(V,E)$

Domanda: Esiste f iniettiva t.c.

$|f(x)-f(y)| \geq 2$ se $(x,y) \in E$

ed il codominio di f è $\{0, \dots, |V|-1\}$?

25

RISULTATI DI NP-COMPLETEZZA (3)

(segue dim. Di NP-completezza)

Trovare una sol. ad **IDL** vuol dire trovare un cammino hamiltoniano in G^C :

Poiché f iniettiva, esiste f^{-1} .

Ordina i nodi:

$v_i = f^{-1}(i)$, $0 \leq i \leq |V|-1$

Osserva che v_i e v_{i+1} sono sempre adiacenti in G^C , quindi $v_0, v_1, \dots, v_{|V|-1}$ è un cammino hamiltoniano.

26

RISULTATI DI NP-COMPLETEZZA (4)

(segue dim. Di NP-completezza)

Vale anche il contrario:

Dato un cammino hamiltoniano in G^C

$v_0, v_1, \dots, v_{|V|-1}$ definisci f come $f(v_i)=i$,

$0 \leq i \leq |V|-1$.

f è ovviamente iniettiva, inoltre dato un arco $\{x, y\}$ di G , $x=v_i$ e $y=v_j$ e deve essere $|f(x)-f(y)| \geq 2$ perché x ed y non sono adiacenti in G^C .

Quindi i due problemi sono equivalenti.



RISULTATI DI NP-COMPLETEZZA (5)

(segue dim. Di NP-completezza)

Poiché è NP-completo il seguente problema:

HP. Istanza: $G=(V, E)$

Domanda: Esiste un cammino hamiltoniano in G ?

anche **IDL** è NP-completo.

DL è in NP:

Si può verificare in tempo polinomiale che G ha diam. 2, che f è una $L(2, 1)$ -etichettatura valida e che $\lambda_{2,1}(G) \leq |V|$.

RISULTATI DI NP-COMPLETEZZA (6)

(segue dim. Di NP-completezza)

Riduciamo **IDL** a **DL**.

Data un'istanza di **IDL** (G), costruiamo G' :

- $V' = V \cup \{x\}$
- $E' = E \cup \{\{x, a\} \text{ per ogni } a \text{ in } V\}$

Allora $|V'| = |V| + 1$ e G' ha diam. 2

29

RISULTATI DI NP-COMPLETEZZA (7)

(segue dim. Di NP-completezza)

Dimostriamo che da una sol. per **DL** si ricava una sol. per **IDL**, cioè f iniettiva t.c.

$$|f(x) - f(y)| \geq 2 \text{ se } (x, y) \in E \text{ sse } \lambda_{2,1}(G') \leq |V'|.$$

- Se trovo g t.c. $\lambda_{2,1}(G') \leq |V'|$: Osserva che G' di diam. 2 implica che $g(a) \neq g(b)$
 - Se $g(x) \neq |V| + 1$ e $\neq 0$ non si possono usare per i nodi di V ne' $g(x) - 1$ ne' $g(x) + 1$ e quindi $\lambda_{2,1}(G') \geq |V'| + 1$ ASS.

30



RISULTATI DI NP-COMPLETEZZA (8)

(segue dim. Di NP-completezza)

- Se $g(x) = |V| + 1$ $f(v) = g(v)$ OK
- Se $g(x) = 0$ $f(v) = g(v) - 2$ OK

In ogni caso esiste f iniettiva tale che il codominio di f è $\{0, \dots, |V| - 1\}$.

Segue l'NP-completezza di DL.

31

Letteratura in diverse direzioni:

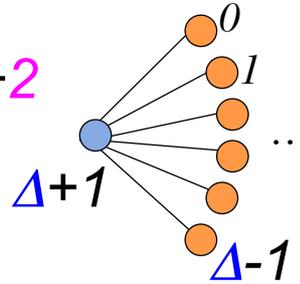
- Limitazioni inferiori e superiori per $\lambda_{h,k}$
- Concentrazione su particolari classi di grafi:
 - Colorazioni esatte
 - Colorazioni approssimate

32

LIMITAZIONI INFERIORI (1)

○ $\lambda_{2,1} \geq \Delta + 1 = (\Delta - 1)1 + 2$

■ $\lambda_{h,k} \geq (\Delta - 1)k + h$
per $h \geq k$



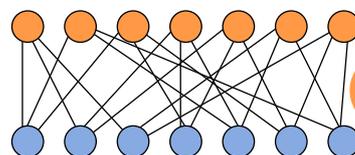
33

LIMITAZIONI INFERIORI (2)

■ $\exists G$ t.c. $\lambda_{2,1}(G) \geq \Delta^2 - \Delta$ [Griggs, Yeh '92]

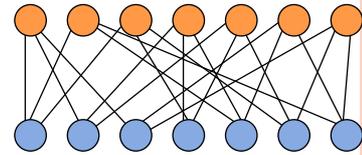
Grafo di incidenza di un piano proiettivo $\pi(n)$ di ordine n , $G=(U \cup V, E)$ t.c.

- $|U| = |V| = n^2 + n + 1$
- $u \in U$ corrisponde ad un punto P_u di $\pi(n)$
- $v \in V$ corrisponde ad una linea l_v di $\pi(n)$
- $E = \{(u, v) \text{ t.c. } P_u \in l_v\}$



34

LIMITAZIONI INFERIORI (3)



- G è regolare e $\Delta = n+1$
 - Per ogni coppia di nodi in U (o in V), la loro distanza è 2,
 - $\forall u, v \in U (\in V), |Adj(u) \cap Adj(v)| = 1$
- $\Rightarrow \lambda_{2,1}(G) \geq |U| - 1 = |V| - 1 = \Delta^2 - \Delta$

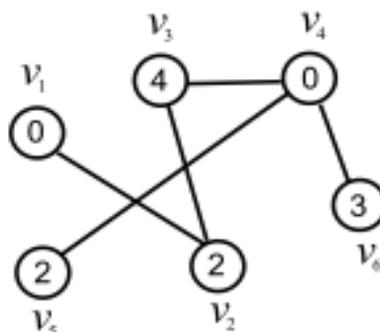
35

LIMITAZIONI SUPERIORI (1)

Algoritmo greedy:

Dato G con nodi v_1, v_2, \dots, v_n ,

etichetta i nodi in ordine assegnando a v_i il colore più piccolo che non sia in conflitto con i nodi già colorati a dist. 1 e 2



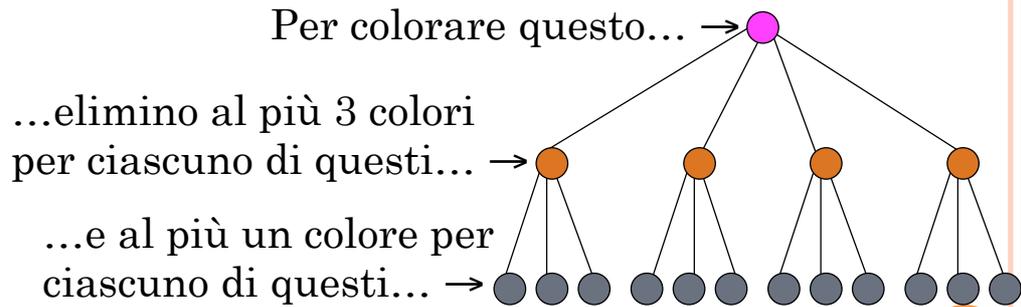
36

LIMITAZIONI SUPERIORI (2)

○ Th. $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + 2\Delta$

[Griggs, Yeh '92]

○ Dim.



Coloro tutto con al più $1 + 3\Delta + (\Delta - 1)\Delta$ colori

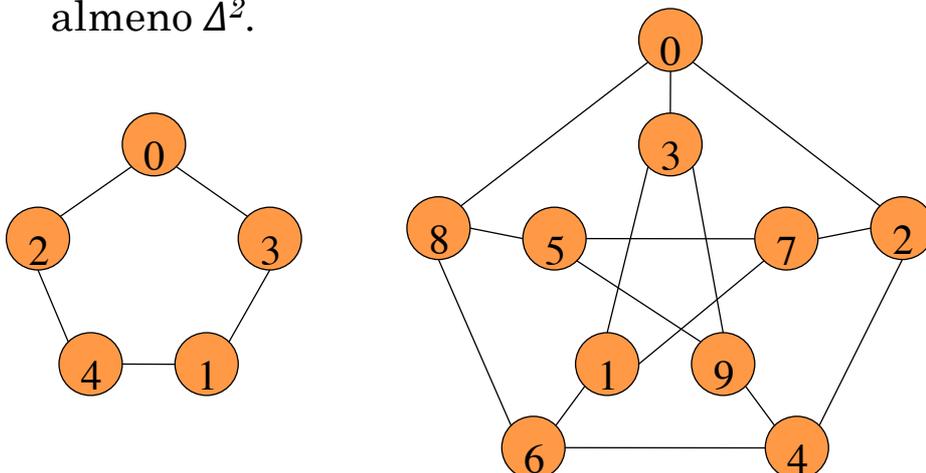
37

LIMITAZIONI SUPERIORI (3)

Congettura: $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2$

[Griggs, Yeh '92]

Questa limitazione superiore è stretta: ci sono grafi con grado Δ , diametro 2 e $\Delta^2 + 1$ nodi il cui λ è almeno Δ^2 .



38

LIMITAZIONI SUPERIORI (4)

Congettura: $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2$ [Griggs, Yeh '92]

■ $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + 2\Delta - 4$ [Jonas '93]

■ $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + \Delta$ [Chang, Kuo '96]

■ $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + \Delta - 1$ [Kral, Skrekovski '03]

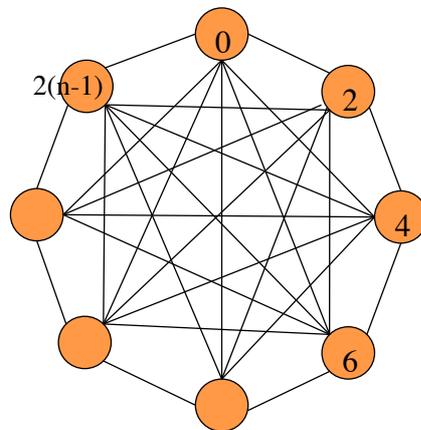
■ $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + \Delta - 2$ [Goncalves '05]

■ $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2$ per Δ abbastanza grande
[Havet, Reed and Sereni '08]

39

RISULTATI ESATTI: CLICCHE K_n

- $\lambda_{2,1}(K_n) = 2(n-1)$
- Tutti i nodi sono adiacenti a coppie



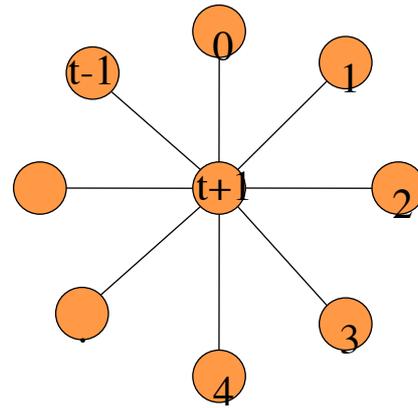
40

RISULTATI ESATTI: STELLE $K_{1,t}$

- $\lambda_{2,1}(K_{1,t})=t+1$

Dim.

- $\lambda_{2,1}(K_{1,t}) \leq t+1$ facile
- $\lambda_{2,1}(K_{1,t}) \geq t+1$
per assurdo



RISULTATI ESATTI: ALBERI T_n (1)

- $\lambda_{2,1}(T_n) = \Delta + 1$ oppure $\Delta + 2$

Dim.

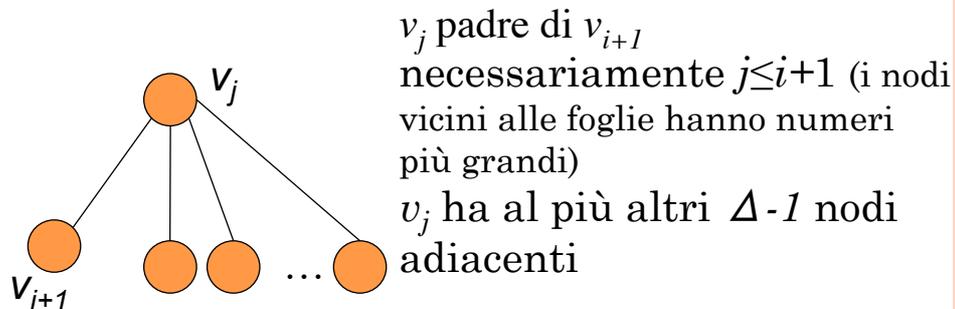
- $\lambda_{2,1}(T_n) \geq \Delta + 1$ perché contiene un $K_{1,\Delta}$
- $\lambda_{2,1}(T_n) \leq \Delta + 2$

algoritmo di sfogliamento: $T_{n-1} = T_n - v_n$ dove v_n foglia. In generale $T_i = T_{i+1} - v_{i+1}$
 v_1 colorato con 0.
 v_i colorato con il primo colore disponibile.

RISULTATI ESATTI: ALBERI T_n (2)

(segue dim. di $\lambda_{2,1}(T_n) = \Delta + 1$ oppure $\Delta + 2$)

Supp. di aver colorato fino a v_i e dover colorare v_{i+1} :



Al più 3 colori sono vietati da v_j

Al più $\Delta - 1$ colori sono vietati dai vicini di v_j

Avendo a disposizione $(\Delta - 1) + 3 + 1$ colori, posso sempre colorare v_{i+1} perciò $\lambda_{2,1}(T_n) \leq \Delta + 2$.

CVD

43

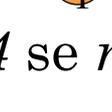
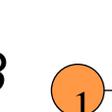
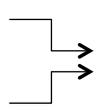
RISULTATI ESATTI: ALBERI T_n (3)

- Questa dim. è stata proposta da Griggs e Yeh [92], che congetturavano che fosse NP-completo decidere tra $\Delta + 1$ o $\Delta + 2$.
- Chang e Kuo [96] hanno confutato la congettura dando un algoritmo polinomiale basato sulla progr. dinamica con complessità $O(\Delta^{4.5} n)$.
- Sono stati proposti, da parte di vari autori, molti algoritmi per abbassare la complessità
- Hasunuma, Ishi, Ono, Uno [08] hanno fornito un alg. lineare.

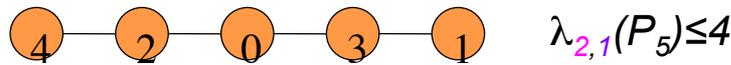
44

RISULTATI ESATTI: CAMMINI P_n

- $\lambda_{2,1}(P_2)=2$
- $\lambda_{2,1}(P_3)=3$
- $\lambda_{2,1}(P_4)=3$
- $\lambda_{2,1}(P_n)=4$ se $n \geq 5$

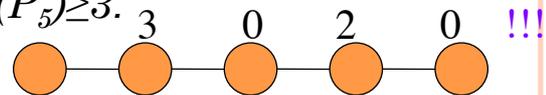


Dai risultati per le stelle



P_5 contiene P_4 quindi $\lambda_{2,1}(P_5) \geq 3$.

Per assurdo $\lambda_{2,1}(P_5)=3$

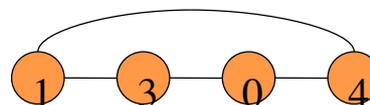
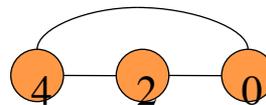


Se $n \geq 5$ il risultato segue dal precedente e da quello per gli alberi.

RISULTATI ESATTI: CICLI C_n (1)

- $\lambda_{2,1}(C_n)=4$

Se $n \leq 4$ verifica caso per caso:



Se $n \geq 5$ C_n contiene un P_n e quindi $\lambda_{2,1}(C_n) \geq 4$.

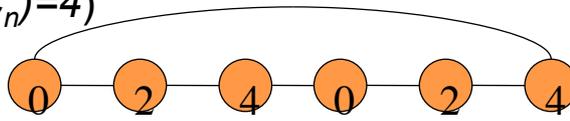
E' anche $\lambda_{2,1}(C_n) \leq 4$:

3 casi:

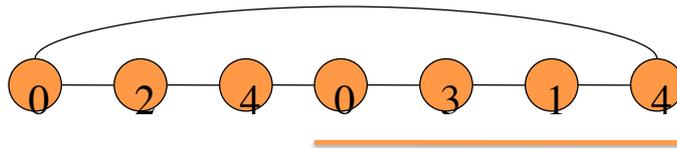
RISULTATI ESATTI: CICLI C_n (2)

(segue dim. di $\lambda_{2,1}(C_n)=4$)

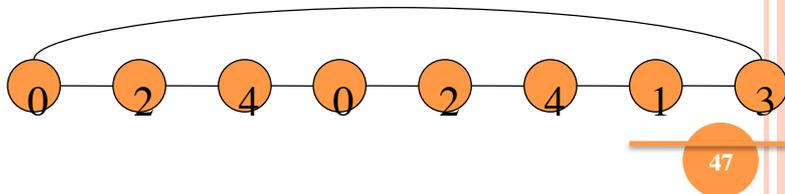
1. $n \equiv 0 \pmod{3}$



2. $n \equiv 1 \pmod{3}$



3. $n \equiv 2 \pmod{3}$



47

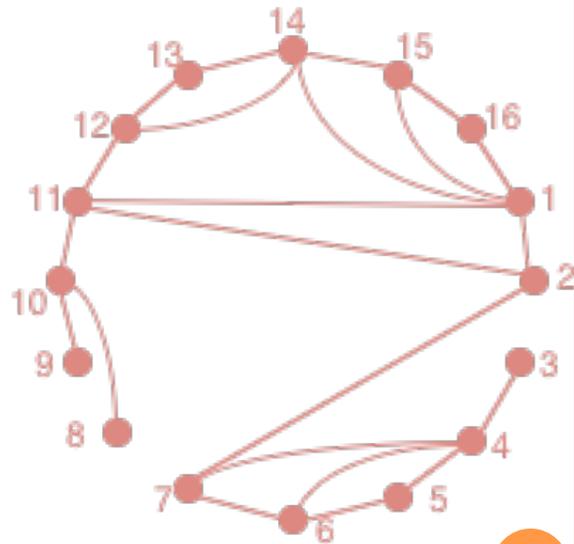
RISULTATI APPROSSIMATI: GRAFI OUTERPLANAR (1)

- $\lambda_{2,1}(G) \leq 2\Delta + 4$ perchè hanno treewidth 2
- Jonas [93] $\lambda_{2,1}(G) \leq 2\Delta + 2$
- Bodlaender et al. [04] $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta + 8$ ma congetturano che $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta + 2$ -> **TESINA**
- C.& Petreschi [04] $\Delta + 1 \leq \lambda_{2,1}(G) \leq \Delta + 2$ e congetturano che questo algoritmo trovi l'ottimo.

48

RISULTATI APPROSSIMATI: GRAFI OUTERPLANAR (2)

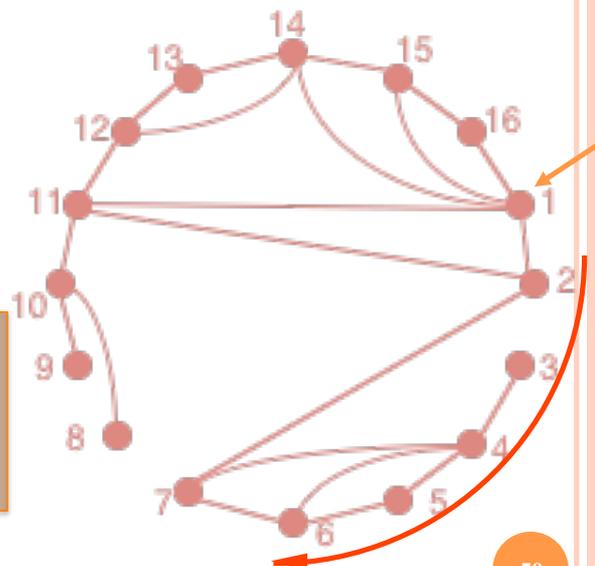
Def. Un grafo è outerplanar se può essere rappresentato in modo piano così che ogni nodo giaccia sul bordo della faccia esterna



49

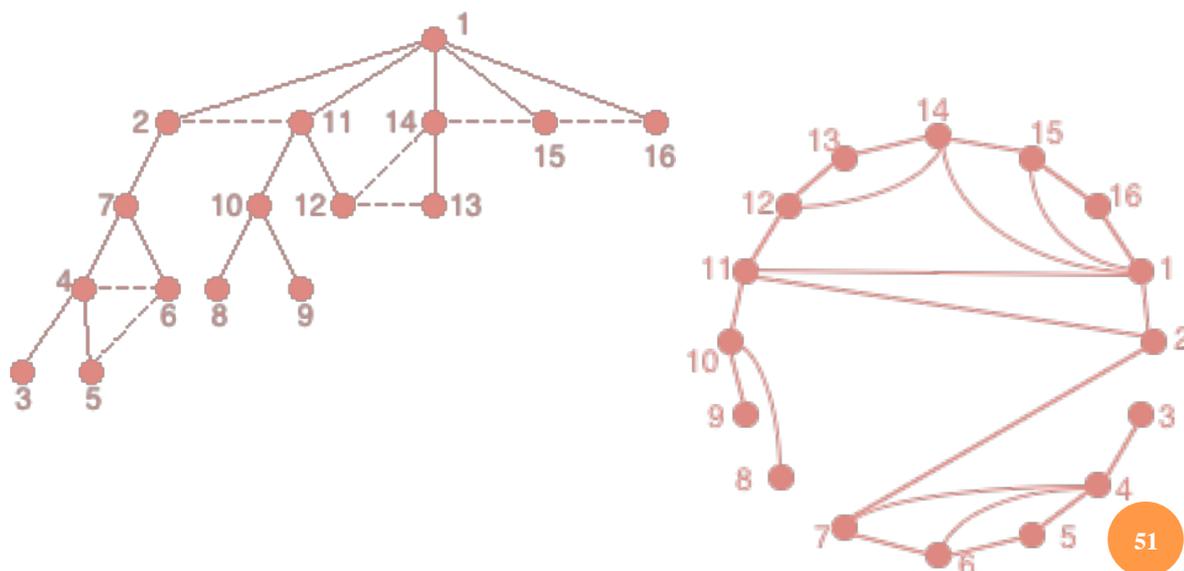
RISULTATI APPROSSIMATI: GRAFI OUTERPLANAR (3)

- Ordered Breadth First Tree:
- Scegli un nodo r
- Induci un ordine totale sui nodi intorno alla faccia esterna
- Esegui una BFS da r in modo che i nodi che vengono prima nell'ordinamento siano visitati per primi



50

RISULTATI APPROSSIMATI: GRAFI OUTERPLANAR (4)



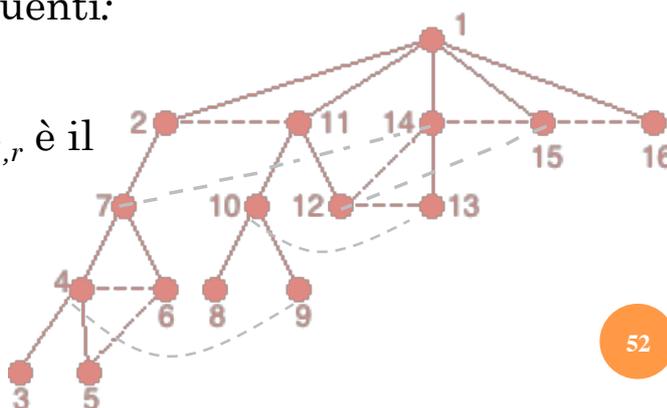
RISULTATI APPROSSIMATI: GRAFI OUTERPLANAR (5)

Th. (ben noto)

$G=(V, E)$; *BFT* $T=(V, E')$

Ogni non tree edge $(v_{l,h}, v_{l,k})$
soddisfa una delle seguenti:

- $l'=l$
- $l'=l-1$ ed $r < k$, dove $v_{l-1,r}$ è il padre di $v_{l,k}$.

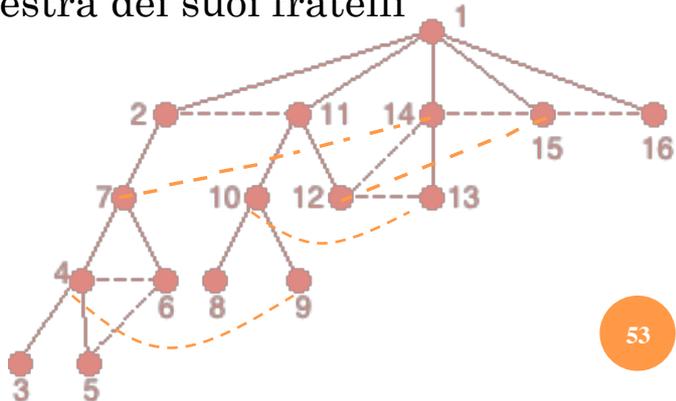


RISULTATI APPROSSIMATI: GRAFI OUTERPLANAR (6)

Th. $G=(V, E)$; *OBFT* $T=(V, E')$:

- Se $(v_{l,h}, v_{l,k})$, $h < k$, allora $k=h+1$
- Se $v_{l,h}$ è figlio di $v_{l-1,i}$ e $(v_{l,h}, v_{l-1,k})$ è non tree, $i < k$, allora $k=i+1$ e $v_{l,h}$ è il più a destra dei suoi fratelli

Gli archi colorati non sono ammissibili



53

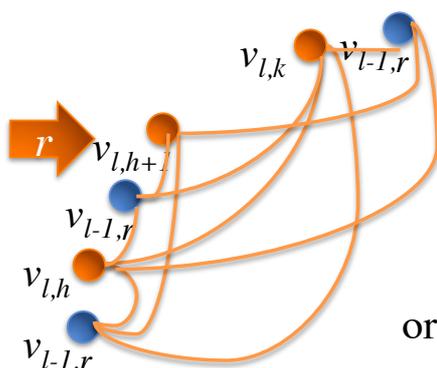
RISULTATI APPROSSIMATI: GRAFI OUTERPLANAR (7)

Dimostriamo separatamente:

1. Se $(v_{l,h}, v_{l,k})$, $h < k$, allora $k=h+1$

Per assurdo, $k > h+1$.

Se $v_{l,h}$ e $v_{l,k}$ sono figli dello stesso padre $v_{l-1,r}$, allora anche $v_{l,h+1}$ lo è.



Consideriamo il sottografo indotto da questi nodi nella rappresentazione outerplanar:

ordine diverso dei nodi considerati!

54

RISULTATI APPROSSIMATI: GRAFI OUTERPLANAR (8)

Segue Dim. di 1. Se $(v_{l,h}, v_{l,k})$, $h < k$, allora $k = h + 1$

Se $v_{l,h}$ e $v_{l,k}$ sono figli di padri diversi $v_{l-1,r}$ e $v_{l-1,s}$.

Wlog $v_{l,h+1}$ è figlio di $v_{l-1,r}$.

Con ragionamenti analoghi ai precedenti si vede che $v_{l-1,r}$ non può giacere esternamente alla sequenza $v_{l,h} v_{l,h+1} v_{l,k}$ altrimenti si avrebbe un incrocio, né internamente, altrimenti la radice dovrebbe giacere internamente e si avrebbe un diverso ordinamento.

(fare per esercizio)

55

RISULTATI APPROSSIMATI: GRAFI OUTERPLANAR (9)

Segue Dim.

2. Se $v_{l,h}$ è figlio di $v_{l-1,i}$ e $(v_{l,h}, v_{l-1,k})$ è non tree, $i < k$, allora $k = i + 1$ e $v_{l,h}$ è il più a destra dei suoi fratelli.

Dim. prima che $k = i + 1$.

Per assurdo, esiste un nodo nel mezzo.

Solito discorso con la sequenza $v_{l-1,k}, v_{l-1,k+1}, v_{l-1,i}$.

56

RISULTATI APPROSSIMATI: GRAFI OUTERPLANAR (10)

Segue Dim.2: Se $v_{l,h}$ è figlio di $v_{l-1,i}$ e $(v_{l,h}, v_{l-1,k})$ è non tree, $i < k$, allora $k=i+1$ e $v_{l,h}$ è il più a destra dei suoi fratelli.

Dim. che $v_{l,h}$ è il più a destra dei suoi fratelli.

Per assurdo, esiste un fratello più a destra.

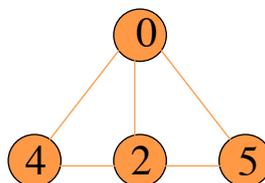
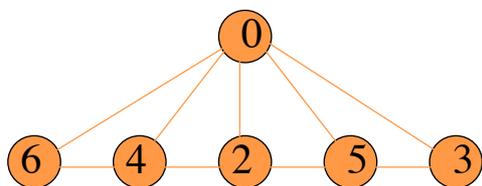
Solito discorso con la sequenza $v_{l,h}, v_{l,h+1}$ tentando di posizionare $v_{l-1,k}$. CVD

57

RISULTATI APPROSSIMATI: GRAFI OUTERPLANAR (11)

Lemma. Se $\Delta \geq 4$, $\Delta+2$ colori sono necessari.

Dim.

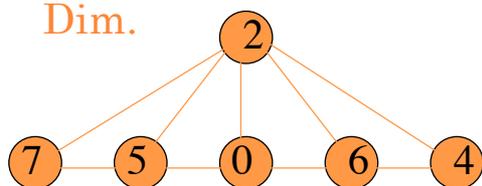


58

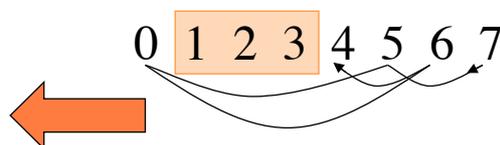
RISULTATI APPROSSIMATI: GRAFI OUTERPLANAR (12)

- **Lemma.** Se la radice ha già un colore assegnato, allora sono necessari $\Delta+3$ colori.

Dim.



Tecnica
generale



59

RISULTATI APPROSSIMATI: GRAFI OUTERPLANAR (13)

- **INPUT:** G outerplanar di max grado Δ
- **OUTPUT:** una $L(2,1)$ -etichettatura per G
- Considera un nodo di gr. max v ed esegui una OBFS da v
- $Label(v) \leftarrow 0$
- Etichetta il primo livello secondo il Lemma
- Per ogni livello $l \geq 2$, da sopra a sotto, da sx a dx
repeat
Etichetta i figli di $v_{l,k}$ secondo il Lemma, eliminando dalla sequenza i colori vietati

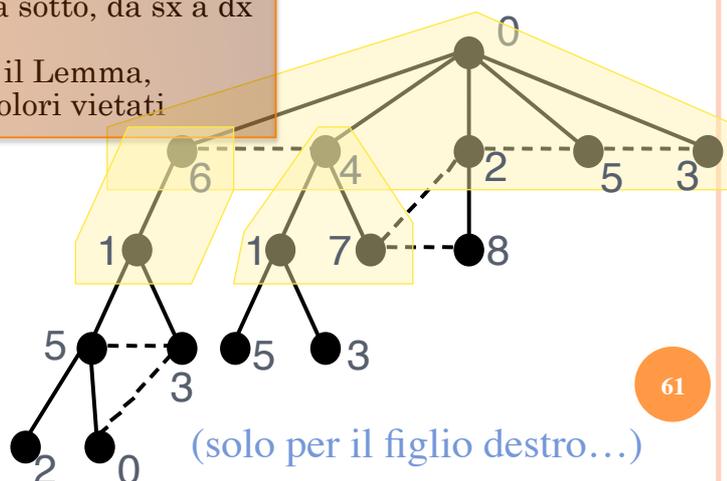
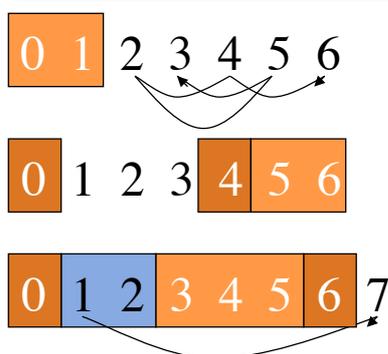
60

RISULTATI APPROSSIMATI: GRAFI OUTERPLANAR (14)

- **INPUT:** G outerplanar di max grado Δ
- **OUTPUT:** una $L(2,1)$ -etichettatura per G

Un esempio:

- Considera un nodo di gr. max v ed esegui una OBFS da v
- $Label(v) \leftarrow 0$
- Etichetta il primo livello secondo il Lemma
- Per ogni livello $l \geq 2$, da sopra a sotto, da sx a dx repeat
Etichetta i figli di $v_{l,k}$ secondo il Lemma,
eliminando dalla sequenza i colori vietati



61

RISULTATI APPROSSIMATI: GRAFI OUTERPLANAR (15)

Correttezza e Limitazioni

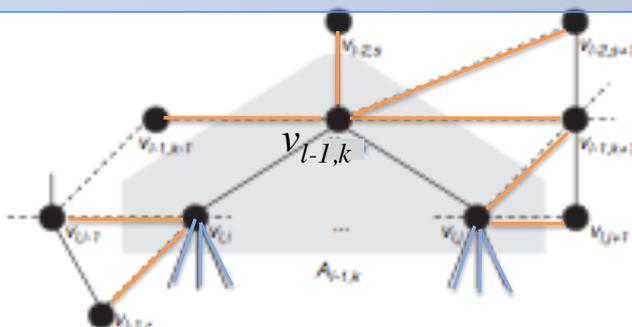
- Migliori risultati precedenti: $\lambda \leq \Delta + 8$ per ogni Δ [BKTL'00]
- Congettura [BKTL00]: $\lambda \leq \Delta + 2$ per ogni Δ
- **TH.** L'algoritmo $L(2,1)$ -etichetta correttamente ogni grafo outerplanar di grado $\Delta \geq 8$ con $\lambda \leq \Delta + 2$ in tempo lineare, altrimenti usa al più 11 colori.
- **DIM.** per induzione, basata su quali archi possono uscire da ciascun sottografo indotto da un nodo e dai suoi figli...

62

RISULTATI APPROSSIMATI: GRAFI OUTERPLANAR (16)

- a. un arco dell'albero verso il padre di $v_{l-1,k}$
- b. al più tre archi non dell'albero che collegano $v_{l-1,k}$ con i nodi allo stesso livello o al livello superiore
- c. al più due archi non dell'albero che partono dal fratello più a sx
- d. al più due archi non dell'albero che parte dal fratello più a dx

Gli altri archi uscenti non contribuiscono alla colorazione a questo passo.



RISULTATI APPROSSIMATI: GRAFI OUTERPLANAR (17)

(Idea della dim.) Per hp. induttiva ho usato $\Delta+3$ colori.
Dimostriamo che bastano per colorare i figli di $v_{l-1,k}$.

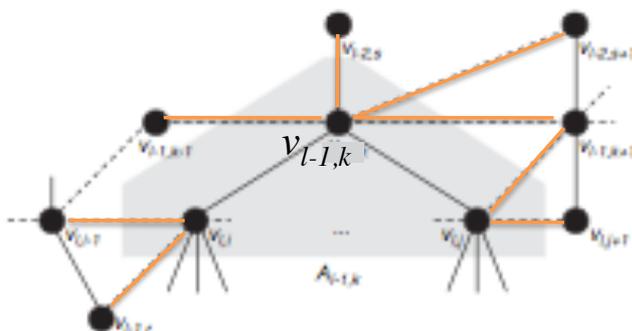
Non uso:

- al più 3 colori per $v_{l-1,k} \rightarrow \Delta$
- al più 1 col. per l'arco a $\rightarrow \Delta-1$
- al più x col. per gli archi b, $0 \leq x \leq 3 \rightarrow \Delta-1-x$ per i $\Delta-1-x$ figli di $v_{l-1,k}$

○ Gli archi di tipo c dettano condizioni solo su 1 2 nodi quindi aggiusto le cose

- Stessa cosa per gli archi di tipo d.

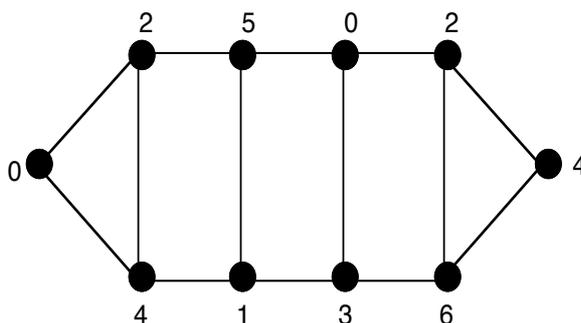
CVD



RISULTATI APPROSSIMATI: GRAFI OUTERPLANAR (18)

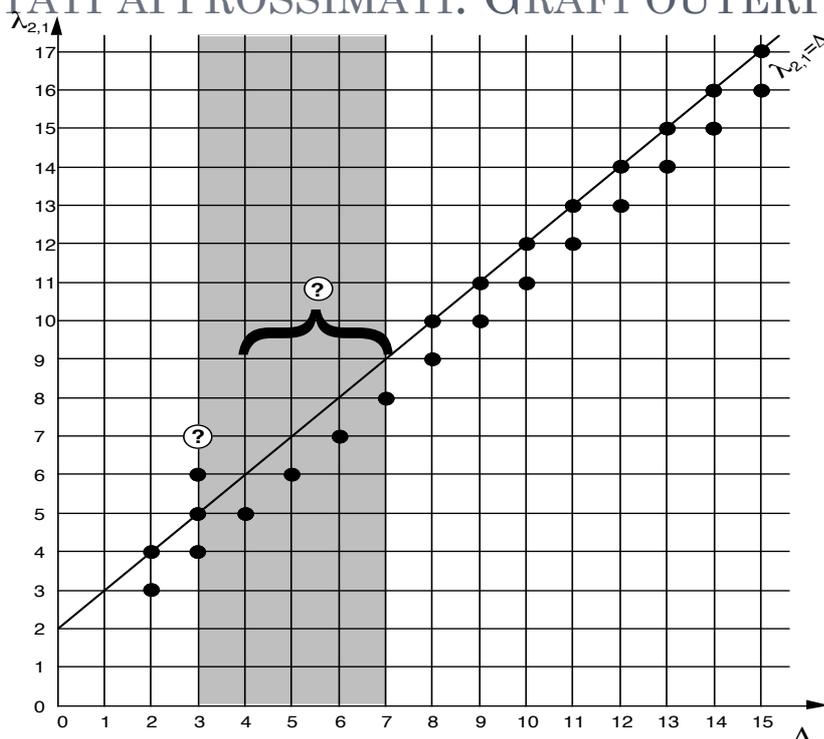
Il caso speciale $\Delta=3$

- Esiste una classe infinita di grafi outerplanar con $\Delta=3$ che richiedono $\lambda=\Delta+3$
- Si può produrre un algoritmo che etichetta questi grafi con $\lambda \leq \Delta+5$

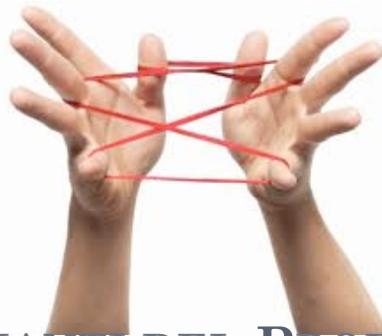


65

RISULTATI APPROSSIMATI: GRAFI OUTERPLANAR (19)



66



VARIANTI DEL PROBLEMA

67

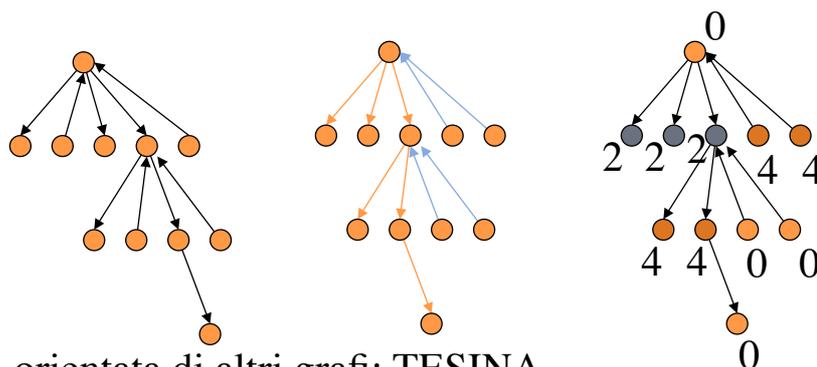
VARIANTI DEL PROBLEMA (1)

- Una **$L(2,1)$ -etichettatura orientata** di un grafo orientato G è una funzione che assegna colori dall'insieme $0, \dots, \lambda$ ai nodi di G tale che nodi a distanza 2 abbiano colori a distanza 1 e nodi adiacenti abbiano colori a distanza 2.
- **Problema della $L(2,1)$ -etichettatura orientata**: minimizzare λ
- N.B. il minimo valore di λ può essere molto diverso che nel caso non orientato. Ad es. alberi...

68

VARIANTI DEL PROBLEMA (2)

- **Reminder:** Per alberi non orientati, $\Delta+1 \leq \lambda \leq \Delta+2$, ed è linearmente decidibile qual è il valore esatto [Chang & Kuo '96, Hasunuma et al. 2008]
- Per alberi orientati, $\lambda \leq 4$ [Chang & Liaw '03]



L(2,1)-etich. orientata di altri grafi: TESINA

69

VARIANTI DEL PROBLEMA (3)

Nel tentativo di rendere più realistico il modello del problema di assegnazione di frequenze:

- Una $L(h_1, \dots, h_k)$ -etichettatura di un grafo G è un'assegnazione di valori interi ai nodi del grafo tale che:

$|l(u)-l(v)| \geq h_i$ se u e v sono a distanza i nel grafo, $1 \leq i \leq k$.

- **Problema della $L(h_1, \dots, h_k)$ -etichettatura:** minimizzare λ
- Di particolare importanza le versioni $L(2,1,1)$ e $L(\delta, 1, \dots, 1)$.
- Già queste versioni sono NP-hard in generale, quindi si studia il problema su classi particolari di grafi.

70

VARIANTI DEL PROBLEMA (4)

Nel caso in cui la topologia sia dotata di un backbone in cui la potenza trasmessa sia superiore rispetto al resto della rete:

- Un *Backbone coloring* di un grafo G rispetto ad un grafo H è un'assegnazione di valori interi ai nodi del grafo tale che:

$|l(u)-l(v)| \geq 2$ se (u,v) è un arco di H e

$|l(u)-l(v)| \geq 1$ se (u,v) è un arco di $G-H$.

- *Problema del Backbone coloring*:

minimizzare λ

Alcuni risultati: TESINA

71

VARIANTI DEL PROBLEMA (5)

Nella pratica, ogni stazione è equipaggiata con un *single half-duplex transceiver* (può o ricevere o trasmettere ed un solo messaggio per volta)

- Il problema consiste nell'assegnare differenti canali ad ogni coppia di connessioni attive se esse possono interferire.
- N.B. connessioni che non interferiscono possono avere canali uguali, mentre connessioni incidenti possono avere canali uguali perché non porteranno mai info simultanee (per via del single radio half duplex)

72

VARIANTI DEL PROBLEMA (6)

Def. la distanza tra due connessioni (u_1, u_2) e (v_1, v_2) :

$$d((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = \min(d(u_i, v_j), i, j=1, 2)$$

N.B.

- dist=0 tra connessioni incidenti
- dist=1 tra connessioni che interferiscono ma non hanno nodi in comune
- dist>1 tra connessioni che non interferiscono

73

VARIANTI DEL PROBLEMA (7)

Def. Dato G , un *distance-1 Edge coloring (D1EC)* è un'etichettatura degli archi di G in cui due archi a distanza 1 hanno colori differenti.

- Il *distance-1 chromatic index* definisce il min num di colori necessari per avere un D1EC valido
- D1EC è una variazione dell'edge coloring problem, in cui sono gli archi a distanza 0 ad avere colori differenti.

Alcuni risultati: TESINA

74

VARIANTI DEL PROBLEMA (8)

Nella pratica, ogni stazione trasmettente può gestire più di un canale, e quindi si assegna un insieme di canali ad ogni stazione.

- dati due insiemi di interi I e J , si definisce
$$\text{dist}(I,J)=\min\{|i-j| : i \text{ in } I \text{ e } j \text{ in } J\}$$

Esempio:

$I=\{0,1,2\}$; $J=\{4,5,6\}$; $\text{dist}\{I,J\}=2$.

75

VARIANTI DEL PROBLEMA (9)

(nozione definita nel 2011, non ancora pubblicata...)

- Una *$L(h,k)$ -etichettatura n -multipla* di un grafo G è un'assegnazione di n valori interi a ciascun nodo del grafo tale che:

$\text{dist}(l(u),l(v)) \geq h$ se (u,v) è un arco di G e

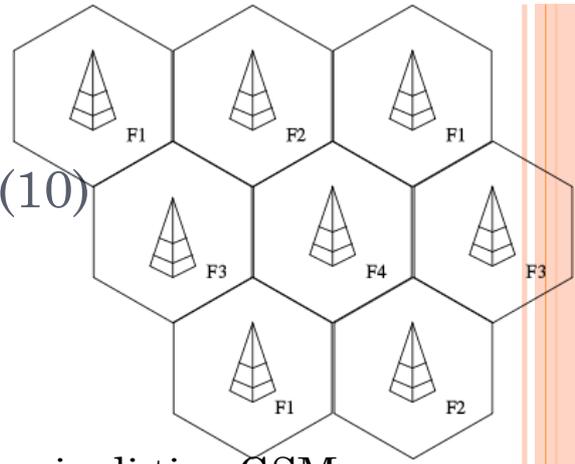
$\text{dist}(l(u),l(v)) \geq k$ se u e v sono a dist.2 in G .

- **Problema della $L(h,k)$ -etichettatura n -multipla :**

minimizzare λ , dato n .

76

VARIANTI DEL PROBLEMA (10)



Nel caso particolare in cui la rete sia di tipo GSM:

- si ha una rete cellulare in cui l'area è divisa in celle esagonali.
- Ogni cella ha una stazione che connette la rete fissa con i dispositivi mobili che si trovano momentaneamente in quella cella
- I telefoni mobili si connettono alla rete GSM cercando di raggiungere la stazione relativa alla cella in cui si trovano.

77

VARIANTI DEL PROBLEMA (11)

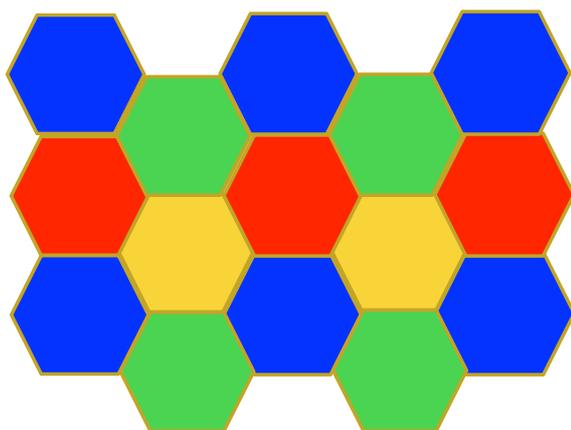
Le celle della rete GSM devono avere frequenze diverse in modo da non disturbarsi vicendevolmente.

- Problema della **colorazione di mappe**: data una mappa disegnata sul piano, il problema consiste nel colorare ogni regione con un colore diverso in modo che regioni adiacenti abbiano colori diversi.
- Il famoso teorema dei 4 colori asserisce che è sempre possibile risolvere questo problema usando al più 4 colori.

78

VARIANTI DEL PROBLEMA (12)

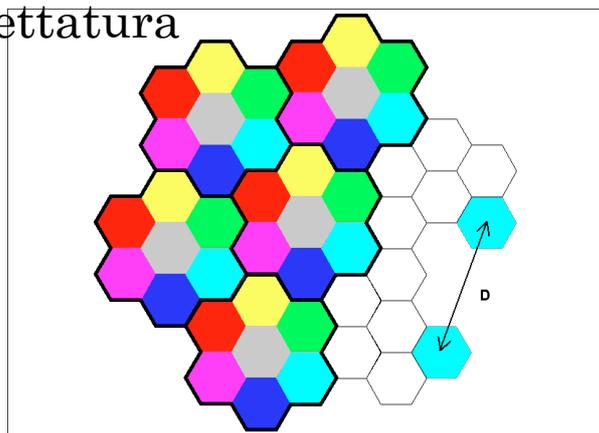
- Quindi 4 diverse frequenze sono sufficienti per una rete GSM “indefinitamente” grande



79

VARIANTI DEL PROBLEMA (13)

- In realtà, in versioni più sofisticate dell'assegnazione di frequenze per una rete GSM, i colori necessari sono 7 -> si torna alla $L(h,k,j)$ -etichettatura



80

UNA DIVAGAZIONE SUL TH. DEI 4 COLORI (1)

- Data una mappa, questa si può naturalmente considerare come un grafo planare G .
- Dato G , sia G^* il **grafo duale**:
- si metta un nodo in ogni regione di G
- si connettano due nodi se e solo se le corrispondenti regioni (facce) sono confinanti (condividono uno spigolo)
- Una colorazione di vertici di G^* corrisponde ad una colorazione della mappa G .

81

UNA DIVAGAZIONE SUL TH. DEI 4 COLORI (2)

- In realtà, i cartografi hanno sempre saputo di poter colorare le mappe con soli 4 colori, ma nel 1852 Francis Guthrie si chiede se la cosa potesse essere dimostrata.
- Dopo oltre 100 anni e molti falsi allarmi, Appel ed Haken hanno dimostrato il teorema dei 4 colori nel 1976.
- La dimostrazione ha richiesto l'aiuto di un calcolatore poiché esamina esaustivamente più di 1700 differenti configurazioni.
- Più recentemente, Robertson, Sanders, Seymour, e Thomas hanno pubblicato una nuova dimostrazione in cui compaiono “solo” 633 configurazioni.

82

UNA DIVAGAZIONE SUL TH. DEI 4 COLORI (3)

Ci sono dei risultati interessanti anche per altri numeri di colori:

○ **2-colorazione.**

Problema risolvibile in tempo polinomiale:

- Assegna un colore ad una regione.
- Assegna ai suoi vicini l'altro colore.
- Assegna ai loro vicini il primo colore
- Continua fino a quando finiscono le regioni oppure ci sono due regioni adiacenti colorate con lo stesso colore. In tal caso la mappa non è 2-colorabile.

83

UNA DIVAGAZIONE SUL TH. DEI 4 COLORI (4)

○ **3-colorazione**

- E' un problema NP-arduo, quindi non ci sono algoritmi per decidere se una mappa è 3-colorabile o no.
- Un metodo: provare esaustivamente tutte le combinazioni di colori per le regioni.
- Inapplicabile: se le regioni sono N , ci sono 3^N possibilità. (se $N=48$ le combinazioni sarebbero all'incirca 8×10^{22})
- ...

84

UNA DIVAGAZIONE SUL TH. DEI 4 COLORI (5)

○ 3-colorazione (segue)

- ...
- Esistono tecniche per semplificare la mappa prima di colorarla (ad es. se una regione ha due o meno regioni adiacenti, si può rimuovere e colorare prima il resto; poi si reinserisce assegnandole un colore che non è usato dai suoi vicini) ma la complessità nel caso peggiore non cambia

85

UNA DIVAGAZIONE SUL TH. DEI 4 COLORI (6)

○ 4-colorazione

- Le dimostrazioni del th. dei 4 colori mostrano come trovare una colorazione valida, ma il numero di casi da verificare è tale da rendere inapplicabile l'implementazione in pratica
- Ci sono delle semplificazioni che si possono fare, simili alle precedenti, ma questo non elimina la necessità di provare esaustivamente tutte le combinazioni.

86

UNA DIVAGAZIONE SUL TH. DEI 4 COLORI (7)

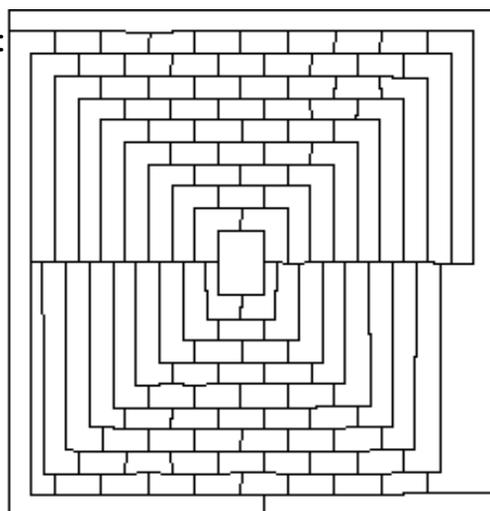
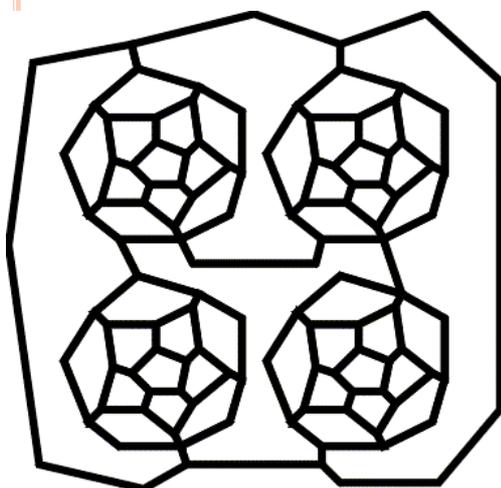
○ 5-colorazione

- E' relativamente veloce colorare una mappa con 5 colori. Esiste un algoritmo che semplifica la mappa fino ad eliminare tutte le regioni e poi le reinserisce una ad una assegnando il colore corretto.

87

UNA DIVAGAZIONE SUL TH. DEI 4 COLORI (8)

Per concludere, un rompicapo (anzi due!):
Provate a 4-colorare queste 2 mappe...



Nel 1975 Martin Gardner dichiarò di poter dimostrare che questa mappa non si può 4-colorare (Pesce d'Aprile)

88

UNA DIVAGAZIONE SUL TH. DEI 4 COLORI (9)

Soluzioni

