CORSO di ALGEBRA (M-Z)
2019-20

PROVA INTERMEDIA
18-11-2019

Svolgere gli esercizi esplicitando il percorso logico seguito per giungere alla soluzione. Non è permesso consultare appunti e testi. Il compito deve essere consegnato ordinato e leggibile, in caso contrario non sarà valutato.

ESERCIZIO 1. Determinare il numero degli "anagrammi" (anche privi di senso) della parola TTTAARRO Determinare quanti fra questi contengono almeno una delle sequenze: TAR, ORA, ARAT.

ESERCIZIO 2. Dati gli interi $m = 9800$ e $n = -308$, determinare:
a) il MCD(m,n) tramite l'algoritmo di Euclide e una identità di Bèzout,
b) le soluzioni dell'equazione diofantea :

$$9800\, x + 308\, y = 56.$$

Dimostrare infine che 308 è un divisore dello zero nell'anello delle classi resto modulo 9800 e, in tale anello, determinare a tale che $308\, a = 0$.

ESERCIZIO 3. Sia $\sigma = 7415826$ la permutazione di S_8 rappresentata in modo standard come prodotto di cicli disgiunti. Determinare l'ordine e la parità di σ. Studiare il sottogruppo $<\sigma>$ di S_8 generato da σ e i suoi sottogruppi. Disegnare il diagramma di Hesse del reticolo dei sottogruppi di $<\sigma>$.

ESERCIZIO 4. Sia:

$$f : \mathbf{Z}/\equiv_8 \rightarrow (\mathbf{Z}/\equiv_2) \times (\mathbf{Z}/\equiv_4)$$

l'applicazione definita da:

$$f\,[x]_8 = ([x]_2,[x]_4)$$

Dimostrare che:

a) f è ben posta,
b) f è un morfismo di anelli dall'anello $(\mathbf{Z}/\equiv_8)$ nell'anello $((\mathbf{Z}/\equiv_2) \times (\mathbf{Z}/\equiv_4)$.

Determinare il nucleo e l'immagine di f. L'immagine di f è un sottogruppo ciclico di $((\mathbf{Z}/\equiv_2) \times (\mathbf{Z}/\equiv_4),+)$?