Corso di Laurea in Informatica - AA 2019-20

ALGEBRA

Antonietta Venezia (Canale M-Z)

Sessione invernale - II Appello- Prova scritta

07 febbraio 2020

SOLUZIONI

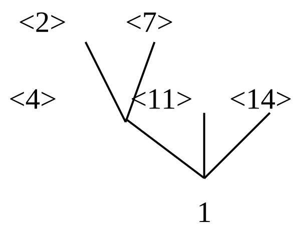
Parte I

ESERCIZIO 1.1. Considerato il gruppo moltiplicativo ($U(\mathbf{Z}_{15}),\cdot$) dell'anello delle classi resto modulo 15, determinare tutti i suoi sottogruppi ciclici e il diagramma di Hasse dell'insieme parzialmente ordinato costituito da tali sottogruppi, si tratta di un reticolo? Il gruppo moltiplicativo ($U(\mathbf{Z}_{15}),\cdot$) è ciclico?

Sol. Si ha: $|U(\mathbf{Z}_{15})| = \varphi(15) = 8$, dunque i suoi sottogruppi non banali possono essere di cardinalità 2 o 4 (teorema di Lagrange). Risulta: $U(\mathbf{Z}_{15}) = \{1,2,4,7,8,11,13,14\}$ e :

o(2) = 4 (<2> = {1,2,4,8});
o(4) = 2 (<4> = {1,4});
o(7) = 4 (<7> = {1,7,4,13});
o(8) = 4 ((<8> = {1,8,4,2} = <2>)
o(11) = 2 (<11> = {1,11})
o(13) = 4 (<13> = {1,13,4,7}= <7>)
o(14) = 2 (<14> = {1,14}).

Pertanto $U(\mathbf{Z}_{15})$ non è ciclico. L'insieme parzialmente ordinato dei sottogruppi ciclici è $(H,\subseteq)$ dove H = {1, <2>, <4>, <7>, <11>, <14>} e il suo diagramma di Hasse è il seguente :



$(H,\subseteq)$ non è un reticolo in quanto ad esempio non esiste sup(<2>,<7>) .

ESERCIZIO 1.2. Nel gruppo simmetrico S_5 è assegnato un 3-ciclo σ e una trasposizione τ disgiunti (dunque essendo disgiunti $\sigma\tau = \tau\sigma$). Determinare il sottoinsieme H di S_5 costituito da tutti i prodotti finiti di σ e di τ e verificare che H è un sottogruppo di S_5.

Sol. Poiché σ e τ hanno cicli disgiunti, ogni permutazione di H è della forma $\sigma^k\tau^h$ con $k,h \geq 0$. Inoltre risulta: $\sigma^3 = \tau^2 = 1$ e quindi $H = \{1,\sigma,\sigma^2,\tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$. L'insieme H è un sottogruppo di S_5, perché: $1\in H$; H è chiuso, in quanto il prodotto $(\sigma^k\tau^h)(\sigma^i\tau^j)$ di due elementi di H è uguale a $\sigma^{k+i}\tau^{h+j}\in H$, e infine l'inverso di un elemento di H appartiene ancora ad H essendo $\sigma^{-1} = \sigma^2$, $\tau^{-1}= \tau$, $(\sigma\tau)^{-1} = \sigma^2\tau$.

Parte II

ESERCIZIO 2.1. Siano $\mathbf{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 a coefficienti reali e $\mathbf{M_2(R)}$ lo spazio vettoriale su R delle matrici quadrate di ordine 2. Sia L il morfismo da $\mathbf{R}_2[x]$ in $\mathbf{M_2(R)}$ definito da:

$$L(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} -b & a+c \\ a-c & b-c \end{pmatrix}$$

Determinare:

i. Una base del nucleo e una dell'immagine di L.
ii. La matrice associata ad L rispetto alle basi: $B = \{1,1+x,1-x^2\}$ e $B' = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Sol. La matrice associata ad L rispetto alle basi canoniche è :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$r(A) = 3 = \dim \operatorname{Im} L = 3 - \dim \operatorname{Ker} L$. Dunque $\dim \operatorname{Ker} L = 0$ ossia $\operatorname{Ker} L = \{0\}$. Inoltre Im L è generata dai vettori $L(1)$, $L(x)$, $L(x^2)$, tali vettori costituiscono una base di Im L poiché dim Im L =3.

La matrice A′ che rappresenta L rispetto alla base B e alla base B′ ha per colonne le coordinate rispetto alla base B′ dei vettori $L(1)$, $L(1+x)$, $L(1-x^2)$. Dunque:

$L(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$L(1+x) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$L(1-x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

Quindi:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 2.2. Al variare del parametro reale k, sia $L_k : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ rappresentato, rispetto alla base $B =\{(1,1,1);(1,1,0); (1,0,0)\}$, dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ (1-k) & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare: a) l'immagine, il nucleo, la dimensione degli autospazi di L_k,
b) i valori di k per cui L_k si diagonalizza.

Posto:

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ (1-k) & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si ha: $\det A_k = -1+2k$, pertanto per $k \neq 1/2$, L_k è un isomorfismo ($\mathrm{Im}L_k = \mathbf{R}^3$, $\mathrm{Ker}\, L_k = \{0\}$). Per $k=1/2$, si ha :

$$A_{1/2} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dunque $\mathrm{Im}\, L_{1/2} = < L_{1/2}(1,1,0); L_{1/2}(1,0,0)>$, essendo:

$$L_{1/2}(1,1,0) = (1,1,1) + (1,1,0) = (2,2,1) \text{ e } L_{1/2}(1,0,0) = (1,0,0).$$

Il nucleo di $L_{1/2}$ è isomorfo allo spazio delle soluzioni del sistema $A_{1/2}X = 0$ (le soluzioni del sistema sono le coordinate rispetto alla base B dei vettori di $\mathrm{Ker}\, L_{1/2}$) e quindi:

$$\mathrm{Ker}\, L_{1/2} = < -2(1,1,1)+(1,1,0)+ 2(1,0,0) > = <(1,-1,-2)>.$$

Gli autovalori di L_k sono gli zeri del polinomio caratteristico $\det(A_k-\lambda I)$. Si ha:

$$\det(A_k-\lambda I) = (1-\lambda) [\lambda^2-\lambda(k+1)-1+2k],$$

da cui un autovalore di L_k, per ogni k, è $\lambda = 1$con molteplicità algebrica almeno 1. Gli altri autovalori sono gli zeri del polinomio $p(\lambda) = [\lambda^2-\lambda(k+1)-1+2k]$. Dunque se si impone la condizione che 1 sia un autovalore di L_k con molteplicità maggiore di 1 si ottiene: $1-k-1-1+2k = k-1 = 0$, da cui $k = 1$. Pertanto, essendo $\det (A_1-\lambda I) = (\lambda^2-2\lambda+1) = (\lambda-1)^2$, 1 è un autovalore di L_1 con molteplicità algebrica 3. L'autospazio E(1) è isomorfo allo spazio delle soluzioni $(A_1-I)X = 0$ e dunque $mg(1) = \dim E(1) = 3 - r((A_1-I) = 1$ e quindi L_1 non è diagonalizzabile.

Posto $\Delta = (k+1)^2-4(-1+2k) = (k^2-6k+5)$, si ha:

- per $k<1$ o $k>5$ (ossia $\Delta > 0$), il polinomio $p(\lambda)$ ha due radici distinte λ_1e λ_2 (entrambi diversi da 1) e quindi L_k ha tre autovalori distinti: 1, λ_1, λ_2 , tutti gli autospazi hanno dimensione 1 e quindi L_k è diagonalizzabile;
- per $1<k<5$ (ossia $\Delta < 0$), il polinomio $p(\lambda)$ non ha radici reali e quindi L_k ha un solo autovalore $\lambda = 1$ il cui autospazio ha dimensione 1. Pertanto L_k non è diagonalizzabile;
- per $k = 1$ si è visto che L_1 non è diagonalizzabile in quanto ha un solo autovalore 1 con $mg(1) =1 < 3 = ma (1)$,
- per $k = 5$, il polinomio $p(\lambda)$ ha una radice $\lambda = 3$ con $ma(3) = 2 = mg(3)$ e quindi L_5 ha due autovalori distinti: $\lambda_1= 1$, $\lambda_2 = 3$ con $mg (1) + mg(3) =1+ 2 = 3$, pertanto L_5 è diagonalizzabile.