Corso di Laurea in Informatica - AA 2018-19

ALGEBRA

Sessione estiva - I Appello- Prova scritta

24 giugno 2019

Antonietta Venezia (Canale M-Z)

SOLUZIONI

Parte I

ESERCIZIO 1.1. Esercizio 1. Siano a, b, c, m interi non-negativi e d := MCD(c, m). Provare che:

$$ac \equiv bc \bmod m \Longleftrightarrow a \equiv b \bmod k, \text{ dove } m = kd.$$

Sol. Sia c = sd. Supponiamo a ≡ b mod k; allora a−b = rk, quindi (a−b)c = rck = rksd = rsm e dunque ac ≡ bc mod m.

Viceversa se ac ≡ bc mod m, allora (a ≡b) mod $\frac{m}{MCD(m,c)}$ e dunque, essendo m= kd, a ≡ b mod k.

ESERCIZIO 1.2. Decidere se i seguenti elementi siano invertibili nell'anello $\mathbf{Z}_{105}$ e, in caso affermativo, calcolarne inverso e ordine; altrimenti spiegare perché non sono invertibili: [91];[43]; [57].

Sol. Si ha: 105 = 3× 5× 7, 91 = 7 ×13, 57 = 3 × 19, mentre 43 è primo, quindi:
MCD(43; 105) = 1, mentre MCD(91; 105) = 7; MCD(57; 105) = 3.
Di conseguenza, [91] e[57] non sono invertibili in $\mathbf{Z}_{105}$ mentre [43] sì.
L'inverso [x] di [43] si calcola usando l'identità di Bézout: 105(-9) +43 (22) = 1, pertanto l'inverso di [43] in $\mathbf{Z}_{105}$ è [22].

Parte II

ESERCIZIO 2.1. Si consideri, al variare del parametro $a \in \mathbf{R}$, il sistema lineare:

$$\begin{cases} 4x + 2y + az = 4 \\ x - y - 2z = 3 \\ 2x + 4y + 3z = 2 \end{cases}.$$

(i) Scrivere la matrice A $\in M_3(\mathbf{R})$ dei coefficienti e la matrice A' $\in M_{3,4}(\mathbf{R})$ completa del sistema; determinare, al variare di a, il rango di A e il rango di A'.

(ii) Stabilire per quali valori del parametro a il sistema ammette soluzioni e per tali valori determinare tutte le soluzioni.

Sol. Sia ha :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & a \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } A' = \begin{pmatrix} 4 & 2 & a & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Inoltre A’ = $\begin{pmatrix} 4 & 2 & a & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ è equivalente per riga alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & a+1 & -4 \end{pmatrix}$,

da cui per $a \neq -1$ risulta r(A) = r(A’) = 3, mentre per $a = -1$ si ha r(A) = 2 e r(A’) = 3. Dunque per il teorema di Rouchè -Capelli, per $a \neq -1$ il sistema ammette una sola soluzione data da:

$$x = \frac{7a-3}{3(a+1)},\ y = \frac{2(6-a)}{3(a+1)},\ z = \frac{-4}{a+1},$$

mentre per $a = -1$ il sistema è impossibile.

ESERCIZIO 2.2. Sia T l’endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ il cui autospazio relativo all’autovalore 0 è il sottospazio W di R^3 di equazioni :

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

e tale che:

T(0,1,1) = (1,0,2) e T(1,1,1) = (1,0,1).

Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica. La matrice seguente:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

è simile alla matrice A? Motivare la risposta.

Sol. Il sottospazio W ha come base {(1,0,-1)}. Pertanto T(1,0,-1) = (0,0,0). Dunque si ha:

T(1,0,0) = T[(1,1,1)-(0,1,1)] = (1,0,1) - (1,0,2) = (0,0,-1),

T(0,1,0) = T [(1,1,1) + (1,0,-1)-2(1,0,0)] = T(1,1,1)+T(1,0,-1)-2T(1,0,0) = (1,0,3),

T(0,0,1) = T[(1,1,1) -(1,0,0)-(0,1,0)] = T(1,1,1)-T(1,0,0)-T(0,1,0) = (1,0,1)-(0,0,-1)-(1,0,3) = (0,0,-1)

La matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Le matrici A e C non sono simili in quanto non hanno gli stessi autovalori.