Corso di Laurea in Informatica - AA 2018-19

ALGEBRA

Sessione estiva - I Appello- Prova scritta

24 giugno 2019

Antonietta Venezia (Canale M-Z)

Svolgere gli esercizi esplicitando il percorso logico seguito per giungere alla soluzione. Non è permesso consultare appunti e testi. Il compito deve essere consegnato ordinato e leggibile in caso contrario non sarà valutato.

Parte I

ESERCIZIO 1.1. Esercizio 1. Siano a, b, c, m interi non-negativi e d := MCD(c, m). Provare che:

$$ac \equiv bc \bmod m \Leftrightarrow a \equiv b \bmod k, \text{ dove } m = kd.$$

ESERCIZIO 1.2. Decidere se i seguenti elementi siano invertibili nell'anello $\mathbf{Z}_{105}$ e, in caso affermativo, calcolarne inverso e ordine; altrimenti spiegare perché non sono invertibili: [91];[43]; [57].

Parte II

ESERCIZIO 2.1. Si consideri, al variare del parametro $a \in \mathbf{R}$, il sistema lineare:

$$\begin{cases} 4x + 2y + az = 4 \\ x - y - 2z = 3 \\ 2x + 4y + 3z = 2 \end{cases}.$$

(i) Scrivere la matrice A $\in M_3(\mathbf{R})$ dei coefficienti e la matrice A' $\in M_{3,4}(\mathbf{R})$ completa del sistema; determinare, al variare di a, il rango di A e il rango di A'.

(ii) Stabilire per quali valori del parametro a il sistema ammette soluzioni e per tali valori determinare tutte le soluzioni.

ESERCIZIO 2.2. Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ il cui autospazio relativo all'autovalore 0 è il sottospazio W di R^3 di equazioni :

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

e tale che:

$$T(0,1,1) = (1,0,2) \text{ e } T(1,1,1) = (1,0,1).$$

Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica. La matrice seguente:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

è simile alla matrice A? Motivare la risposta.