CORSO di ALGEBRA (M-Z)
2018-19

PROVA INTERMEDIA
21-11-2018

Svolgere gli esercizi esplicitando il percorso logico seguito per giungere alla soluzione. Non è permesso consultare appunti e testi.

ESERCIZIO 1. Determinare il numero degli "anagrammi" (anche privi di senso) della parola TORRETTO. Determinare quanti fra questi contengono almeno una delle sequenze: TOR, ORE, TOT.

ESERCIZIO 2. Dati gli interi $m = 2520$ e $n = 1617$, determinare:
a) il MCD(m,n) tramite l'algoritmo di Euclide e una identità di Bèzout,
b) le soluzioni dell'equazione diofantea :

$$2520\ x + 1617\ y = 63.$$

Dimostrare infine che 1617 è un divisore dello zero nell'anello delle classi resto modulo 2520 e, in tale anello, determinare a tale che $758a = 0$.

ESERCIZIO 3. Sia U(n) il gruppo degli elementi invertibili dell'anello $\mathbf{Z}_n$.

a) Determinare quali dei gruppi seguenti sono isomorfi tra loro definendo esplicitamente un isomorfismo: $U(6)^2$, U(8), U(10), U(12).
b) Dimostrare che l'applicazione

$$f : \mathbf{Z}_{30} \to U(10)$$

definita da:

$$f(x) = 3^x$$

è un morfismo di gruppi dal gruppo ($\mathbf{Z}_{30}$,+) nel groppo U(10) e determinarne il nucleo e l'immagine.

ESERCIZIO 4. Sia G un gruppo e siano x e y elementi di G tali che:

$$o(x) = n, \quad o(y) = 2, \quad o(xy) = 2.$$

Dimostrare che per ogni $k \in \mathbf{N}$ risulta:

$$yx^{n-k} = x^k y$$

(Suggerimento: la dimostrazione è per induzione su k , tenendo conto che $1= (xy)(xy)$)