CORSO di ALGEBRA (M-Z)

2015-16

PROVA INTERMEDIA

23-11-2015

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1. Determinare il numero degli "anagrammi" (anche privi di senso) della parola CARROZZONA. Determinare quanti fra questi contengono almeno una delle sequenze: AZO, NAR, ONA.

Soluzione.

Il numero degli "anagrammi" della parola CARROZZONA è uguale al numero delle classi di equivalenza rispetto alla relazione su S_{10} definita da: due permutazioni σ e τ sono equivalenti se individuano lo stesso anagramma. Pertanto il numero degli anagrammi è uguale a $\frac{10!}{2!2!2!2!}$, ossia al numero di tutte le permutazioni diviso il numero degli elementi in ogni classe. Indicati con:

A = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza AZO,
B = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza NAR,
C = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza ONA,
allora il numero degli anagrammi che contengono almeno una delle sequenze date è $|A\cup B\cup C|$, tale numero si calcola con il principio di inclusione-esclusione.

Un elemento di A si ottiene anagrammando la parola (AZO)CARRONZ, dove la sequenza AZO è considerata una lettera, ma quelli che sono anagrammi anche di (AZO)(AZO)CRRN sono contati due volte, dunque $|A| = \frac{8!}{2!} - \frac{6!}{2!2!}$. Un elemento di B si ottiene anagrammando la parola (NAR)CAROOZZ, dove la sequenza NAR è considerata una lettera, dunque $|B| = \frac{8!}{2!2!}$. Analogamente $|C| = \frac{8!}{2!2!}$.

Si ha

$$|A\cap B| = 6!,\ |A\cap C| = 3\,\frac{6!}{2!} - \frac{4!}{2!},\ |B\cap C| = \frac{7!}{2!}.$$

L'insieme $(A\cap C)$ è unione di tre insiemi: dell'insieme X delle parole ottenute anagrammando la parola (AZO)(ONA) CRRZ, dell'insieme Y delle parole ottenute anagrammando la parola (AZONA)CORRZ, e dell'insieme K delle parole ottenute anagrammando la parola (ONAZO)CARRZ quindi per il principio di inclusione-esclusione si ha $|A\cap C| = |X| + |Y| + |K| - |Y\cap K|$, in quanto $X\cap Y = X\cap K = \emptyset$. Dunque , essendo $Y\cap K$ l'insieme delle parole ottenute anagrammando la parola (AZONAZO)CRR, si ha:

$$|A\cap C| = 3\,\frac{6!}{2!} - \frac{4!}{2!}.$$

Gli elementi dell'insieme ($B \cap C$) sono gli anagrammi della parola (ONAR)ACROZZ , dunque: $|B \cap C| = \frac{7!}{2!}$.
Infine ($A \cap B \cap C$) è l'unione dell'insieme H delle parole ottenute permutando le lettere (ONAR),(AZO),C,R,Z; con l'insieme T degli anagrammi della parola (AZONAR)CROZ, dunque $|A \cap B \cap C| = |H|+|T|$, essendo $(Z \cap K) = \emptyset$ e quindi:

$$|A \cap B \cap C| = 5!+5!$$

Per il principio di inclusione-esclusione si ha:

$$|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|B \cap C|-|A \cap C|+|A \cap B \cap C|.$$

ESERCIZIO 2. Determinare:

a) in $\mathbf{Z}_{990}$ le soluzioni dell'equazione 5355 x = 90,

b) le soluzioni della rispettiva equazione in **Z** : 5355 x ≡ 90 mod 990.

Soluzione.

Lo sviluppo dell'algoritmo di Euclide applicato ai numeri 5355 e 990 è il seguente:

$5355 = 990\,(5) + \underline{405}$,
$990 = 405\,(2) + \underline{180}$,
$405 = 180(2) + \underline{45}$
$180 = 45(4)$

Dunque si ha: MCD(5355,990) = 45, pertanto l'equazione in $\mathbf{Z}_{990}$: 5355x = 90 è compatibile poiché il MCD(5355, 990) = 45 divide 90.
Per calcolare le soluzioni dell'equazione 5355x = 90 in $\mathbf{Z}_{990}$, si divide per 45 ottenendo l'equazione in $\mathbf{Z}_{22}$: 119x = 2 equivalente a 9x = 2 Quest'ultima equazione ha una sola soluzione in $\mathbf{Z}_{22}$. Infatti, essendo MCD(9,22) = 1, si ha:
$x = 9^{-1} \cdot 2$. Per calcolare l'inverso di 9 in $\mathbf{Z}_{22}$, si consideri la seguente identità di Bézout relativa a 9 e 2 : $1 = 9(5) + 22(-2)$. Passando in $\mathbf{Z}_{22}$ si ottiene:

$$1 = 9(5) + 22(-2) = 9(5) + 0 = 9(5).$$

Ossia $9 \cdot 5 \equiv 1 \ (mod\ 22)$ e pertanto $x = 9^{-1} \cdot 2 = 5 \cdot 2 = 10$ in $\mathbf{Z}_{22}$.
Quindi l'equazione in $\mathbf{Z}_{990}$: 5355x = 90 ha 45 soluzioni che corrispondono alle 45 classi di congruenza (*mod* 990) in cui si ripartisce la classe $[10]_{22}$:

$$[10]_{22} = \bigcup_{k=0,\dots 44} [10+k\,\tfrac{990}{45}]_{990}$$

L'equazione congruenziale data ha in **Z** infinite soluzioni che sono tutti gli interi appartenenti alla classe $[10]_{22}$.

ESERCIZIO 3. Discutere la compatibilità ed eventualmente trovare le soluzioni della seguente equazione diofantea:

$$128 = 44x + 120y.$$

Soluzione.

Lo sviluppo dell'algoritmo di Euclide applicato ai numeri 44 e 120 è il seguente:

$120 = 44\,(2) + \underline{32}$,	$\underline{32} = 120-44(2)$,
$44 = 32 + \underline{12}$,	$\underline{12} = 44- 32$
$32 = 12(2) + \underline{8}$	$\underline{8} = 32-12(2)$
$12 = 8 + \underline{4}$	$\underline{4} = 12-8$
$8 = 4(2)$	

Dunque si ha: MCD(120,44) = 4. L'equazione diofantea $44x+120y = 128$ ha soluzioni intere in quanto 4 = MCD(120,44) divide 128.
Dall'identità di Bezout: $44(11) + 120(-4) = 4$ moltiplicando per (128/4) = 32, si ottiene:

$$44\,(352)+ 120(-128)= 128,$$

pertanto la coppia (352,-128) è una soluzione e quindi l'insieme delle soluzioni intere dell'equazione diofantea assegnata è :

$$\{(352+120k,\ -128-44k) : k \in \mathbf{Z}\}.$$

ESERCIZIO 4. Determinare la cardinalità del gruppo $U(\mathbf{Z}_{50})$ degli elementi invertibili dell'anello delle classi resto modulo 50 e dimostrare che tale gruppo è ciclico ($U(\mathbf{Z}_{50}) = <3>$). Descrivere inoltre i suoi sottogruppi.

Soluzione.

La cardinalità di $U(\mathbf{Z}_{50})$ è data dal valore della funzione di Eulero $\varphi(50) = 20$, infatti

$$\varphi(n) = n-\left(\frac{n}{p_1}+\ldots+\frac{n}{p_k} - \frac{n}{p_1 p_2} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_k}\right),$$

essendo $p_1,\ldots p_k$ tutti i divisori primi di n.
Si ha:

$$<3> = \{3^t \in U(\mathbf{Z}_{50}) : t \in \mathbf{N}\},$$

pertanto

$$<3> = \{\ 3,9,27,31,43,29,37,11,33,49,47,41,23,19,7,21,13,39,17,1\}$$

E dunque : $<3> = U(\mathbf{Z}_{50})$.
I gruppi ciclici di ordine 20 sono tutti isomorfi al gruppo $(\mathbf{Z}_{20},+)$ sottogruppi del quale sono del tipo $h\mathbf{Z}_{20}$ con h divisore di 20 e $|h\mathbf{Z}_{20}| = 20/h$. L'isomorfismo:

$$\phi : \mathbf{Z}_{20} \rightarrow U(\mathbf{Z}_{50}) \text{ è definito da } \phi(1) = 3$$

e si ha: $\phi(2) = 9$, $\phi(4) = 31$, $\phi(5) = 43$, $\phi(10) = 49$. Pertanto i sottogruppi non banali di $U(\mathbf{Z}_{50})$ sono 4: $<9>$, isomorfo a $2\mathbf{Z}_{20}$ con 10 elementi, $<31>$, isomorfo a $4\mathbf{Z}_{20}$ con 5 elementi, $<43>$, isomorfo a $5\mathbf{Z}_{20}$ con 4 elementi e infine $<49>$, isomorfo a $10\mathbf{Z}_{20}$ con 2 elementi.